Hans-Jürgen Elschenbroich und Wilfried Dutkowski
elschenbroich@t-online.de, wdutkowski@hs-euklid.de

„Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer“ vor 25 Jahren und heute

Vor 25 Jahren hat Volker Hole sein Buch „Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer“ veröffentlicht. Die Diskussion zum Computereinsatz war geprägt durch eine eher akademische Diskussion um Fachdidaktik und Allgemeinbildung auf der einen Seite und andererseits durch isolierte schulische Leuchtturmprojekte bei einer weit verbreiteten Skepsis der Lehrkräfte.
In diesem Beitrag werden grundlegende didaktische Prinzipien zur Organisation des Unterrichts mit digitalen Mathematikwerkzeugen aufgezeigt und exemplarisch an Aufgaben von Hole versucht, sein Werk fortzuschreiben um dabei neue Akzente zu setzen.

Hinweis: Dieser Text ist eine gekürzte und leicht überarbeitete Fassung des Artikels im MNU journal 5/2023 und 1/2024. Der Schwerpunkt liegt wie bei Hole auf der Sekundarstufe I. In einem Folge-Beitrag werden wir auch auf Beispiele aus der Sekundarstufe II eingehen.

1 Phasen des Einsatzes von Computern im Mathematikunterricht

Computer und heute speziell im Schulbereich iPads sind (auch) mathematische Werkzeuge, die erst seit vergleichsweise kurzer Zeit existieren. Mathematik treiben sowie Mathematik lehren und lernen ist ohne Werkzeuge nicht möglich. Volker Hole hat sich 1998 mit dem damals noch recht neuen Werkzeug Computer und seinem Einsatz in der Schule auseinandergesetzt. Sein Anliegen war „methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I“ (Hole, 1998, Untertitel) und die bestehende Schulwirklichkeit zu erfassen und die damalige fachdidaktische Diskussion darzustellen. Hole folgte dabei dem allgemeinbildenden Ansatz der ‚zentralen Ideen‘ im Sinne von H. W. Heymann (1998).

Hole benennt in seiner Übersicht zunächst vier Phasen des Einsatzes von Computern im Mathematikunterricht.

1. In der ersten Phase bis 1976 befasste man sich vorwiegend „mit den logischen und technischen Grundlagen der Datenverarbeitung“ (Hole, 1998, 12).
2. In der zweiten Phase bis Ende der achtziger Jahre standen Programmiersprachen (BASIC, LOGO, Pascal) im Vordergrund. In dieser Phase dominierten die PC-Fachräume das Geschehen, und es wurden in den Programmiersprachen eigene kleine Programme geschrieben.
3. In der dritten Phase (in der er damals mittendrin war) stand der Einsatz „von allgemeiner oder fachspezifischer Anwendersoftware“ wie Excel, Derive und DynaGeo im Fokus (Hole, 1998, 12). Zunächst gingen die Aktivitäten noch meist vom leeren Bildschirm aus, die Nutzung elektronischer Arbeitsblätter (Elschenbroich & Seebach 2000-2003; Baptist 2004a, b) entwickelte sich erst allmählich. In dieser Phase gab es auch eine Entwicklung von einer Vielzahl einzelner Programme hin zu umfassenden Modularen Mathematik-Systemen wie z.B. GeoGebra oder TI Nspire.
4. Fast hellseherisch war seine Vorausahnung, dass „demnächst wohl eine vierte folgen wird, die wesentlich durch multimedial arrangierte Kursangebote und Lernumwelten und durch Formen des Telelearnings geprägt sein wird“ (Hole, 1998, 12). In dieser Phase befinden wir uns heute und von da aus wird ein Blick zurück auf die dritte Phase und das Buch von Hole geworfen

2 Didaktische Prinzipien beim Einsatz digitaler Werkzeuge im MU

Es gibt in der Literatur zahlreiche didaktische Prinzipien. Laut Wikipedia sind didaktische Prinzipien „allgemeine Grundsätze zur Gestaltung von Erziehung und Unterricht. Als Regelsetzungen beanspruchen sie Gültigkeit für jedes organisierte Lehren und Lernen nach dem Erkenntnisstand der Zeit“ (Wikipedia).

Aus der persönlichen Sicht und langjährigen Erfahrung der Autoren sind folgende allgemeine pädagogische Prinzipien von besonderer Bedeutung:

- genetisches Prinzip,
- operatives Prinzip,
- Spiralprinzip,
- Prinzip der Vielfalt der Repräsentationsformen[1]

Sie sind nicht von ungefähr mit großen Namen wie Wagenschein, Piaget und Bruner verknüpft und werden hier mit digitalen Werkzeugen verbunden. Sie werden durch zwei weitere Prinzipien ergänzt, die insbesondere beim zielgerichteten Einsatz digitaler dynamischer Lernumgebungen bedeutsam sind

- dynamische Visualisierung,
- systematische Variation (Heintz et al., 2017).

Der Einsatz von Werkzeugen hat großen Einfluss auf das, was man mathematisch macht und denkt. Die Quadratur des Kreises beispielsweise ist mit Zirkel und Lineal nicht lösbar, mit anderen Werkzeugen schon (Dutkowski, 2023). Die zeichnerische Konstruktion eines Dodekaeders auf dem ebenen Zeichenblatt ist aufwändig, aber mit GeoGebra 3D mit dem Befehl *Dodekaeder*(A, B) bei zwei Basispunkten A und B erledigt. Gegenüber einer möglichen Euphorie hat aber schon Hölzl (1994, 4) thematisiert, ob es „*einen didaktischen Vorzug zum Nulltarif*“ geben kann oder ob nicht durch eine erhöhte Komplexität „*ein didaktisches Gleichgewicht*“ ins Spiel kommt. Auch ist nicht zu unterschätzen, dass die Bedienung neuer Werkzeuge erst gelernt werden muss, was für Lehrerinnen & Lehrer wie für Schülerinnen & Schüler zutrifft. So wie eine Gitarre als Artefakt ein Holzkasten mit Drähten ist, dessen Nutzung als Instrument erlernt werden muss, so ist es auch bei Computer & iPad. Es kommt darauf an, dass „ein Nutzer sich ein zunächst allgemeines ‚Artefakt‘ zu eigen macht, zum ‚Instrument‘ macht, um es für die eigenen mathematischen Handlungen und Intentionen zu nutzen“ (Barzel, 2016, 155). Dabei sind Werkzeugkompetenzen mehr als bloße routinierte Bedienung (Heintz et al., 2017).

2.1 Genetisches Prinzip

Das genetische Prinzip besagt in der fachlichen Ausprägung, dass der Mathematikunterricht sich nicht an der Axiomatik der Mathematik orientieren soll, sondern am Prozess der Entstehung von Mathematik, ohne deswegen alle historischen Irrwege zu durchlaufen. Ein Unterricht, der die Begriffsentwicklung im Rahmen der Genese mathematischer Begriffe problematisiert, wird dann als historisch-genetischer Unterricht bezeichnet. Es geht nicht darum, Schülerinnen & Schülern etwas beibringen zu wollen/sollen, sondern ihnen zu helfen die Sachverhalte zu entdecken (Wagenschein, 2010). „*Das zentrale Anliegen des genetischen Prinzips ist es, dass Mathematik nicht als ein Fertigprodukt gelernt wird, sondern dass Lernende einen Einblick in den Prozess der Entstehung von Mathematik erhalten. Mathematik ist etwas, bei dem Lernende entdecken oder erfinden können, auch wenn es sich meist oder fast ausschließlich nur um Nacherfindungen handelt*“ (Weigand o. Jg., 5).

Martin Wagenschein als bekanntester Vertreter des genetischen Prinzips sieht aber auch einen individual-genetischen Aspekt: „*Pädagogik hat mit dem Werdenden zu tun: mit dem werdenden Menschen und – im Unterricht, als Didaktik – mit dem Werden des Wissens in ihm*“ (Wagenschein 2010, 75). Auch in der mit Felix Klein verbundenen Meraner Reform findet sich die Forderung „den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen.“ (Gutzmer, 1908, 104)

[1] Dieses Prinzip ist im originalen MNU Artikel so noch nicht aufgelistet worden. Wir werden in einem Folgeartikel darauf eingehen.

2.2 Operatives Prinzip

Eigenes Handeln spielt für das Lernen, für die Erkenntnisgewinnung eine entscheidende Rolle. Das operative Prinzip wird meist mit Piaget verbunden, der Denken als verinnerlichtes oder gedachtes Handeln verstand. Es wurde von Wittmann vertieft und auch auf die Objekte bezogen, mit denen Operationen vorgenommen wurden (Wittmann, 1985). „*Daher sind im Unterricht konkrete Materialien, zeichnerische Darstellungen und Textmaterialien einzusetzen, an denen die Schüler real oder gedanklich operieren, ‚forschen' können*.“ (Wittmann, 1981, 79).

Zum operativen Prinzip gehört heutzutage auch die Verbindung von klassischen analogen Werkzeugen und virtuellen digitalen Werkzeugen wie PC und dynamischen Lernumgebungen einschließlich nötiger Phasen der Entschleunigung (Heintz, 2016). Digitale Werkzeuge erweitern dabei zum einen die zu untersuchenden Objekte (z.B. Ortslinien) und zum anderen die durchführbaren Operationen (z.B. Ziehen an Punkten, Graphen oder Schiebereglern). Digitale dynamische Lernumgebungen bieten heute umfangreiche Möglichkeiten für computergestützte Handlungen, die dann im Klassenrahmen entsprechend aufgegriffen, durchdacht und auf ein neues gemeinsames Niveau gebracht werden müssen.

2.3 Spiralprinzip

Die „Curriculum-Spirale“ wird meist mit Bruner in Verbindung gebracht (Bruner, 1970) und ist eng mit fundamentalen Ideen / Big Ideas / zentralen Ideen / Leitideen verknüpft. Hole zitierte dazu Wittmann:

1. „*Der Unterricht ist in jedem Fach in erster Linie auf die fundamentalen Ideen (‚Struktur') der jeweiligen Fachwissenschaft auszurichten.*“
2. „*Die Grundideen eines Fachs können jedem Kind, gleich welcher Altersstufe oder sozialen Herkunft, auf der Grundlage der Denkmittel, die es mitbringt, und der Darstellungsmittel, die es versteht, in entsprechend einfacher Form vermittelt werden.*“ (Wittmann, 1981, 84)

Schon zu Beginn des 20. Jahrhunderts thematisierte Whitehead ‚zentrale Ideen' und forderte, sie in den Mittelpunkt des mathematischen Schulunterrichts zu stellen. Heute sind die Leitideen der Bildungsstandards der KMK maßgebend (Algorithmus und Zahl, Messen, Raum und Form, funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall). Es geht darum, damit einen ‚roten Faden' über die Jahre hinweg zu haben und diese Ideen immer wieder spiralig aufzugreifen. Dabei wird auch das E-I-S Modell von Bruner bedeutsam, in dem es um die verschiedenen Weisen der Erkenntnisgewinnung und ihr Zusammenspiel geht (siehe Kap. 3). Dabei hat Bruner besonders auf „die Bedeutung des Entdeckens“ (Bruner, 1970, 33) hingewiesen und gefordert, den Unterricht methodisch so anzulegen, dass die Schülerinnen & Schüler Sachverhalte und Verallgemeinerungen selbst entdecken können (discovery learning) im Gegensatz zur lehrerzentrierten Behauptungs- und Beweismethode.

2.4 Prinzip der dynamischen Visualisierung

Im Gegensatz zu statischen Visualisierungen (z.B. Abbildungen, Modellen, ...) findet man dynamische Visualisierungen in Form von Videos oder Animationen wieder. Speziell bei dynamischer Mathematiksoftware sind insbesondere der Zugmodus und der Einsatz von Schiebereglern typisch, oft in Kombination mit der Spur oder Ortslinien.

Im Gegensatz zu einem passiven Konsum dynamischer Visualisierungen sollten sie mit lernförderlichen Aktivitäten interaktiv verbunden werden. Dynamische Visualisierungen sind aber nicht prinzipiell lernförderlicher als statische, weil sie eine größere intellektuelle Belastung mit sich bringen können, einen Overload-Effekt. „*Dynamische Visualisierung ist mehr als bloße Veranschaulichung. Sie ist aber kein didaktischer Vorteil zum Nulltarif*“ (Heintz et al., 2017, 171). Lernen bedeutet aktive Auseinandersetzung mit dem Gegenstand, aus der in Verbindung mit dem Vorwissen neues Wissen entsteht (Elschenbroich, 2004). Dabei ist zu beachten, dass eine zu umfassende und ‚glatte' Visualisierung die Gefahr birgt, zu große Schritte im Erkenntnisprozess zu gehen und dabei entscheidende Schritte zu überspringen. Auf Phasen der Entschleunigung und des manuellen Durcharbeitens darf dabei nicht verzichtet werden (Heintz et al., 2017, 171).

2.5 Prinzip der systematischen Variation

Ohne Variationsmöglichkeiten (Zugmodus, Schieberegler) ist keine Dynamik möglich. Wenn sich aber alles Mögliche ändert, wird es beliebig schwierig, alles zu überblicken und die entscheidenden Änderungen zu erkennen. Deswegen ist es oft sinnvoll und nötig, die Variationsmöglichkeiten in gewissen Maßen einzuschränken. Es gilt, ein geleitetes Entdecken zu organisieren, was auch passend auf die jeweilige Lerngruppe zugeschnitten sein muss. Es geht nicht um planloses Variieren, sondern um zielgerichtetes Arbeiten, also systematisches Explorieren, um alle Sätze der Schulmathematik als Invarianzen bzw. funktionale Abhängigkeiten entdeckbar zu gestalten.

Der Gedanke der Variation von Objekten ist schon länger bekannt. Ein anderer, seltener betrachteter Aspekt ist die Variation der benutzten Werkzeuge, was dann auch mit einem Wechsel der Perspektiven einhergeht (Elschenbroich, 2017). Durch die Weitentwicklung der Mathematiksoftware zu Modularen Mathematik-Systemen ist dieser Werkzeugwechsel innerhalb einer Programmumgebung (z.B. von Geometrie zu Funktionen oder Tabellenkalkulation) erheblich einfacher geworden.

3 Erkenntnisgewinn und Computer: Vom E-I-S-Modell zu C-E-I-S

Von Bruner stammt der Gedanke, „*daß man etwas auf drei verschiedene Weisen kennen kann: dadurch, daß man es tut, dadurch, daß man es sich bildlich vorstellt, und dadurch, daß man ein symbolisches Mittel wie z. B. die Sprache verwendet*" (Bruner, Olver & Greenfield, 1971, 27). In der deutschen Übersetzung von Aebli werden dafür die Begriffe „handlungsmäßig, bildhaft und symbolisch" benutzt (Bruner, Olver & Greenfield 1971, 21). Dies ist dann, vor allem in der deutschsprachigen Interpretation, als E-I-S Modell (**e**naktiv, **i**konisch, **s**ymbolisch) bekannt geworden und gibt didaktische Anregungen, wie mathematische Inhalte für das Lernen von Mathematik aufbereitet werden können. Wenn dabei von „kognitiven Entwicklungsstufen" (Stangl, 2023) gesprochen wird, impliziert dies eine Hierarchie, die stufenweise zu durchlaufen wäre. Dies gilt sicher für die individuelle kindliche Entwicklung vom ersten Lebensjahr bis zum Ende der Grundschule. Oft werden diese Stufen auch im Unterricht in dieser Reihenfolge durchlaufen. Dies ist in der Sekundarstufe aber nicht zwingend, sondern unnötig einschränkend (Elschenbroich & Sträßer, 2022).

Wenn zum E-I-S Modell gesagt wird „Wissen und Information lässt sich in der Regel im Unterricht in verschiedenen Repräsentationen darstellen" (Stangl, 2023), zeigt dies eine statische Sicht auf fertiges Wissen, während für uns hier der dynamische Charakter des Lernens als Aktivität, die individuelle Erkenntnisgewinnung von besonderer Bedeutung ist. Hole weist schon 1998 darauf hin, „daß mit dem Computer mathematische Inhalte *auf allen drei Ebenen der Handlung, des Bildes bzw. der Grafik und der Sprache* dargestellt werden können" (Hole, 1998, 223). Wir nutzen hier nicht den Begriff Ebenen, oder Stufen, sondern sprechen näher an Bruner von Weisen oder Modi. Der erforderliche und fruchtbare Wechsel zwischen den Modi wird bei Hole „intermodaler Transfer" genannt (Hole, 1998, 168). Lotz weist speziell zum enaktiven Modus darauf hin, dass es entscheidend ist, dass die Handlungen so erfolgen, dass sie „Einsichten ins Symbolische anbahnen" (Lotz, 2020).

Dem Computer kommt schon 1998 eine besondere Rolle zu. Hole erweiterte damals das E-I-S Modell zum C-E-I-S Modell. Das war wegweisend, wurde aber kaum aufgegriffen. Hole sah E, I, S als Eckpunkte eines Dreiecks und legte C als Punkt in die Mitte. Damit blieb dies ein ebenes Schema.

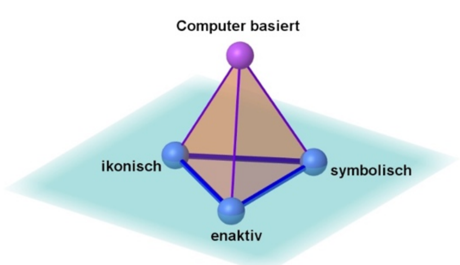


Abb. 1. C-E-I-S-Pyramide © GeoGebra, Elschenbroich & Dutkowski

Wir wollen dagegen den Computer aus der E-I-S Ebene herausheben. Seine übergreifende Bedeutung und der Zusammenhang mit den drei Modi der Erkenntnisgewinnung wird jetzt durch ein dreidimensionales Modell visualisiert (Abb. 1), in dem bei einer dreieckigen Pyramide der C-Eckpunkt aus der E-I-S- Ebene herausragt.

Dadurch wird es möglich, nicht nur die C-E-I-S Pyramide als Ganzheit zu betrachten, sondern neben der E-I-S Ebene auch die anderen Seitenflächen als eigene Ebenen E-I-C, I-S-C und E-S-C zu sehen. Elschenbroich & Sträßer betonen insbesondere, dass dynamische Mathematik-Software wie GeoGebra „*durch die Möglichkeiten dynamischer Visualisierung in bislang nicht gekannter Form die Ebenen enaktiv und ikonisch, je nach Art und Qualität der Lernumgebung auch alle drei Ebenen*" verbindet (Elschenbroich & Sträßer, 2022, 242).

Das C-E-I-S Modell ist eine moderne Ausprägung des didaktischen Prinzips der Vielfalt der Repräsentationsformen.

4 Ausgewähltes Beispiel – damals und heute

Im Folgenden wird ein Beispiel von Volker Hole vorgestellt und gezeigt, wie man es heute bearbeiten könnte. Dabei wird konsequent Bezug auf die fünf genannten Prinzipien genommen.

Die mächtigen Befehle von GeoGebra bieten vorher nicht gekannte Möglichkeiten, Themen in dynamischen Lernumgebungen aufzubereiten. Im Beispiel geht es uns vorwiegend darum, die didaktische und softwaretechnische Entwicklung der letzten 25 Jahre zu beleuchten.

Da es bei Hole oft keine explizite Aufgabenformulierung gab, wird im Folgenden eine mögliche und passende Aufgabenstellung sinngemäß formuliert.

Quadratische Funktionen mit Parametern, Scheitelpunkt und Nullstellen

Problemstellung: Die Graphen quadratischer Funktionen der Form: $y = f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ sollen untersucht werden.

Damals war der Einsatz von Schiebereglern noch nicht verbreitet, und das formstabile Variieren von Graphen war nicht möglich. Hole nutzte das CAS-Programm Derive (Abb. 4), in dem im Algebra-Fenster systematisch Funktionsterme per Hand eingegeben und dann die Graphen gezeichnet wurden.

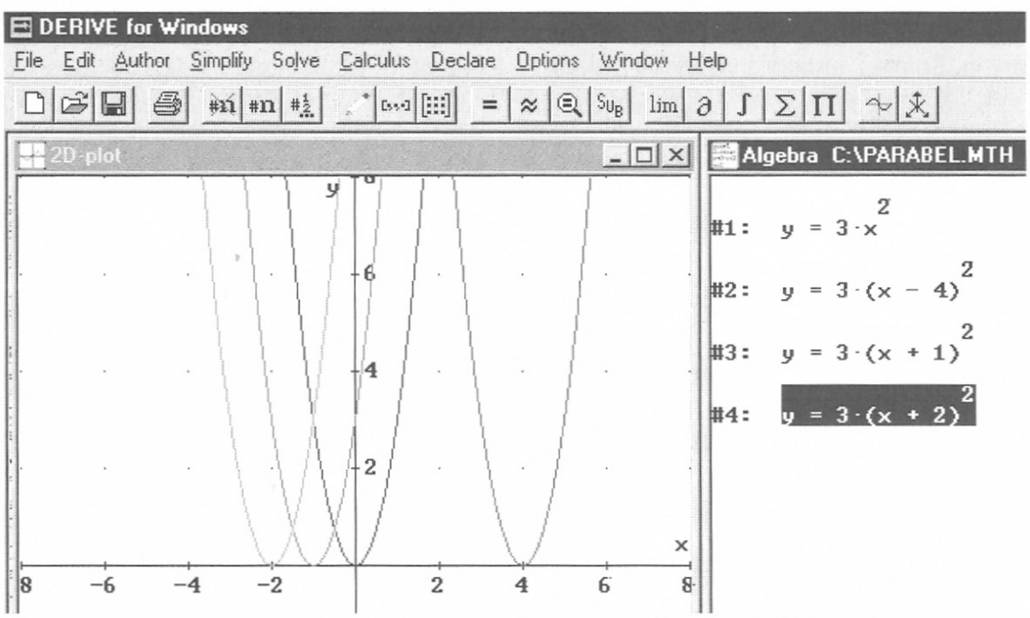
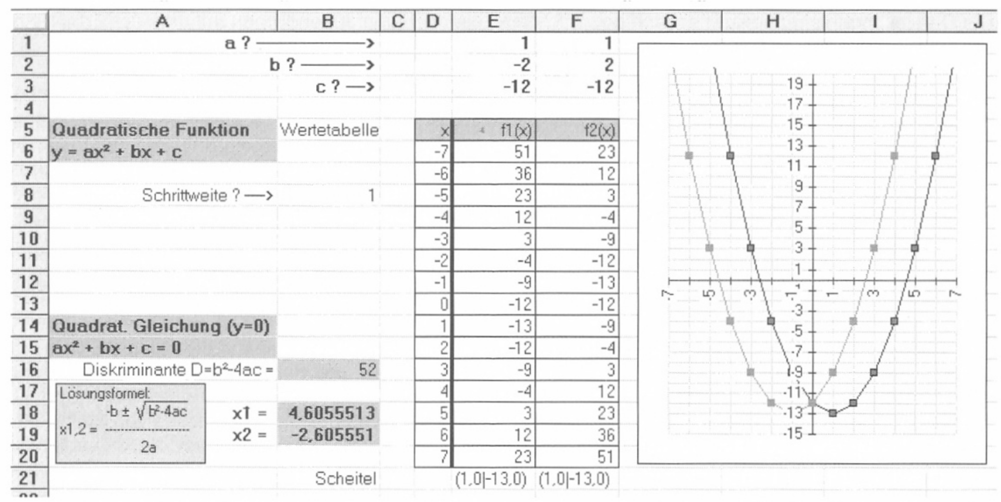


Abb. 2. Quadratische Funktionen $y = f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ (Hole, 1998, 107)

Heute wird man die Parameter mit Schiebereglern dynamisieren. Es gibt dann keine Vielzahl von Graphen, die eine Schar bilden, sondern jeweils prototypisch eine Funktion, die den aktuellen Parametern entspricht.



	A	B	C	D	E	F
1	a ? ———>				1	1
2	b ? ———>				-2	2
3	c ? —>				-12	-12
4						
5	Quadratische Funktion	Wertetabelle		x	f1(x)	f2(x)
6	y = ax² + bx + c			-7	51	23
7				-6	36	12
8	Schrittweite ? —>	1		-5	23	3
9				-4	12	-4
10				-3	3	-9
11				-2	-4	-12
12				-1	-9	-13
13				0	-12	-12
14	Quadrat. Gleichung (y=0)			1	-13	-9
15	ax² + bx + c = 0			2	-12	-4
16	Diskriminante D=b²-4ac =	52		3	-9	3
17	Lösungsformel:			4	-4	12
18	-b ± √b²-4ac x1 =	4,6055513		5	3	23
19	x1,2 = ———— x2 =	-2,605551		6	12	36
20	2a			7	23	51
21		Scheitel			(1,0|-13,0)	(1,0|-13,0)

Abb. 3: Quadratische Funktionen $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (Hole, 1998, 298)

Weitere Problemstellung: Die Graphen quadratischer Funktionen mit Gleichungen der Form $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ sollen auf Scheitelpunkt und Nullstellen untersucht werden.

Mit quadratischer Ergänzung wird dann $S = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{c-b^2}{4a}\right)$ hergeleitet und als Nullstellenformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Dies ist das algebraische Standardverfahren. Eine visuelle Unterstützung wird dadurch realisiert, dass für jeden Parameter a, b, c in einer Excel-Tabelle nebeneinander zwei Werte eingegeben werden können und die beiden zugehörigen Graphen als Streckenzüge angezeigt werden (Abb. 5).

Heutzutage ist zum einen ein anschaulicher Zugang zur Scheitelpunktform möglich, indem eine Parabel als Graph einer quadratischen Funktion im Zugmodus variiert wird, um dabei die Gesetzmäßigkeiten der Scheitelpunktform entdecken zu können (Abb. 6). Wir beschränken uns hier auf Parabeln mit a = 1. Dazu muss die Objektfixierung der Funktion aufgehoben werden. Dann kann man mit der Maus oder den Pfeiltasten den Graphen in der Lage verschieben, ohne die Form zu ändern. Hier wird also nicht vom Funktionsterm ausgegangen, sondern vom Graphen und vom Scheitelpunkt!

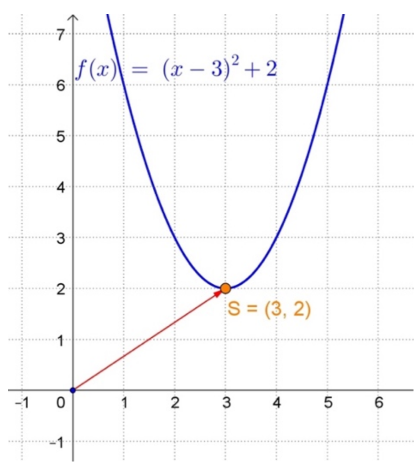


Abb. 4: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen © GeoGebra, Elschenbroich & Dutkowski

Damit kann dann in ähnlicher Weise eine Nullstellenformel für quadratische Funktionen entdeckt werden, die der p-q-Formel entspricht (Abb. 7), und zwar in drei Fällen ausgehend von der Scheitelpunktform. Bei zwei Nullstellen erhält man dann $x_{1,2} = x_S \pm \sqrt{-y_S}$.

In der Problemstellung angesprochene Prinzipien:

- *Genetisches Prinzip*: Hier steht der individuell-genetische Aspekt im Vordergrund. Bei einer gegebenen Funktion / Parabel samt Scheitelpunkt ist bei graphischer Herangehensweise die Scheitelpunktform offensichtlich. Die Nullstellenformel ergibt sich dann bei zwei Nullstellen durch die Erkenntnis, dass diese in Abhängigkeit von y_S symmetrisch zu x_S liegen. Bei einer Nullstelle erkennt man eine binomische Formel. Liegt die Parabel ganz oberhalb der x-Achse, so gibt es offensichtlich keine Nullstelle.
- *Operatives Prinzip*: Eine virtuelle Handlungsorientierung ist durch Ziehen am Funktionsgraphen gegeben, der dadurch Lage und Term ändert, aber nicht die grundlegende Gestalt. Dies ist vergleichbar mit dem Umgang einer Schablone. Das Arbeiten mit der Parabelschablone ist auch als Vorbereitung und Entschleunigung möglich und sinnvoll.
- *Spiralprinzip*: Aus der Scheitelpunktform ergibt sich spiralig ein Zugang zur Nullstellenformel in einer speziellen Form.
- *Dynamische Visualisierung*: Die entscheidende Idee ist hier, nicht mit dem Funktionsterm und der Variation von Parametern zu beginnen, sondern direkt den Graphen zu variieren.
- *Systematische Variation*: Das freie Ziehen am Graphen von f wird sinnvoll eingeschränkt, indem erst nur in y-Richtung variiert werden soll, dann nur in x-Richtung. Erst danach wird beides kombiniert.

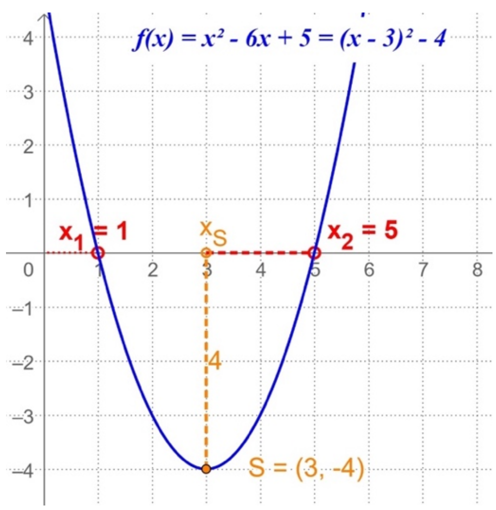


Abb. 5: Nullstellen quadratischer Funktionen © GeoGebra, Elschenbroich & Dutkowski

5 Rückschau und Ausblick

Rückblickend kann man sagen, dass das Buch von Hole seinerzeit eine bessere Würdigung verdient gehabt hätte, insbesondere sein C-E-I-S Modell. In der universitären Didaktik passte das Buch nicht in die Zeit, denn die Stoffdidaktik wurde ab den 80-er Jahren geringschätzt und war kaum Thema der didaktischen Forschung. In der Schule war es wiederum nicht verbreitet, weil es nicht direkt als Schulbuch konzipiert war. Für die schulpraktische Lehrerausbildung in den Fachseminaren an den Studienseminaren, Lehrerfortbildungen bildete es aber oft die didaktische Grundlage für den Technologieeinsatz im Mathematikunterricht.

Das von Hole bevorzugte digitale Werkzeug Excel hatte sich schulisch damals nicht durchgesetzt, und die damalige technische Situation an den Schulen (schwer nutzbare Computerräume) sowie der Stand der Software (viele parallele Programme) erschwerten eine unterrichtspraktische Akzeptanz.

Heute erlebt man eine Vereinheitlichung in der zunehmenden Ausstattung der Schulen mit iPads und WLAN in Verbindung mit umfassenden Modularen Mathematik-Systemen wie GeoGebra oder TI Nspire. Damit hat sich Situation grundlegend geändert, was erhoffen lässt, dass sich im Mathematikunterricht einiges tun kann und wird, um die mathematische Bildung auf höchstem technischem Niveau zu unterstützen. Dazu gehört auch, dass die Schulen ein abgestimmtes Konzept erarbeiten, wie das Lernen mit Medien und (nicht nur digitalen) Werkzeugen organisiert werden sollte (Kliemann & Dutkowski, 2014).

In diesem Sinn war das Buch von Volker Hole wegweisend und gibt auch heute noch Anregungen, wie in einer modernen Interpretation und Fortschreibung ein Mathematik-Unterricht durch den Einsatz von Computern als Werkzeug und Instrument nachhaltiger und wirksamer sein könnte.

Für uns ist dabei das im Abschnitt 3 entwickelte dreidimensionale Modell der C-E-I-S Pyramide von besonderer Bedeutung.

Ausgewählte Literatur

- Heintz, Gaby; Elschenbroich, Hans-Jürgen; Laakmann, Heinz; Langlotz, Hubert; Rüsing, Michael; Schacht, Florian; Schmidt, Reinhard & Tietz, Carsten (2017): Werkzeugkompetenzen. Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. MNU & T³. Verlag Medienstatt. Download für MNU-Mitglieder: https://www.mnu.de/publikationen#aktuell.
- Hole, Volker (1998): Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer. Methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I. Auer, Donauwörth.
- Elschenbroich, Hans-Jürgen & Dutkowski, Wilfried: "Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer" vor 25 Jahren und heute. In: *MNU journal* 5/2023 und 1/2024.

Hinweis: die ausführlichen MNU-Artikel samt Beispielen finden Sie auf https://www.geogebra.org/m/xcdyjczq .

Autoreninfo:

- *Hans-Jürgen Elschenbroich, elschenbroich@t-online.de, war Lehrer für Mathematik und Informatik am Gymnasium, Fachleiter Mathematik am ZfsL Krefeld und Neuss und Mitarbeiter der Medienberatung NRW. Er ist Gründungsmitglied des GeoGebra Instituts NRW.*
- *Wilfried Dutkowski, wdutkowski@hs-euklid.de, war Lehrer für Mathematik und Physik an der inklusiven Gesamtschule Bonns Fünfte und Mitarbeiter der Medienberatung NRW sowie Konrektor an diversen Hauptschulen. Er ist Gründungsmitglied des GeoGebra-Instituts NRW.*