

Μ. Τσιλπιδής
Μαθηματικός MSc Δ.Τ.Μ

Πανεπιστήμιο Αθηνών
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα
Διδακτικής και Μεθοδολογίας
των Μαθηματικών

Ενσωμάτωση της Τεχνολογίας στη Δ.Τ.Μ

η δυναμική της **Ευκλείδειας Γεωμετρίας** στα σύγχρονα Μαθηματικά

δίαυλοι επικοινωνίας μεταξύ της Άλγεβρας, Αναλυτικής και Ευκλείδειας Γεωμετρίας



Περιλαμβάνει δραστηριότητες με ψηφιακά δομήματα για την αναβάθμιση του μαθήματος της Γεωμετρίας στο Λύκειο

διδασκτικές παρεμβάσεις για τη Β' Λυκείου

“ισχυροί παιδαγωγικοί, διδακτικοί και πολιτιστικοί λόγοι συνηγορούν για τη διατήρηση και ενδυνάμωση ενός ανεξάρτητου μαθήματος Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο.”

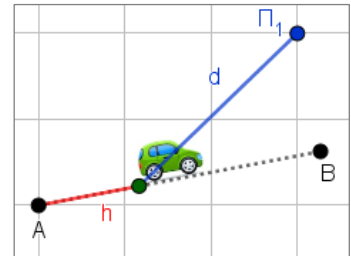
(Ι. Θωμαΐδης)

Ερωτήματα

1ο στάδιο (εξέταση συμμεταβολής των μεταβλητών h και d)

Μετακινήστε το σημείο “Αυτοκίνητο” κατά μήκος της διαδρομής AB.

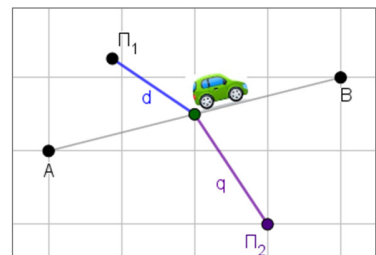
- 1.1 Ποιες είναι οι μεταβλητές τού προβλήματος;
- 1.2 Έστω M το σημείο με συντεταγμένες (h,d) . Για τη διάταξη των σημείων A, B και Πόλη1 που φαίνονται στο σχήμα, προσπαθήστε να σχεδιάσετε στο χαρτί την καμπύλη που διαγράφει το σημείο M σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy .
- 1.3 Από τη μορφή της καμπύλης που σχεδιάσατε, προκύπτει αν η συγκεκριμένη συμμεταβολή είναι συνάρτηση; Επαληθεύστε στη συνέχεια τα αποτελέσματα ανοίγοντας το διακόπτη «Γραμμή M».



2ο στάδιο (εξέταση συμμεταβολής των μεταβλητών q και d)

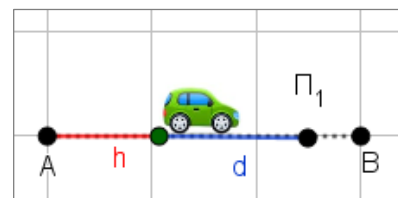
Ανοίξτε το διακόπτη “Εμφάνισε το σημείο N”.

- 2.1 Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου N;
- 2.2 Ποια συμμεταβολή εκφράζει η γραμμή που διαγράφει το σημείο N;
- 2.3 Μετακινήστε την ευθεία (ϵ) σε διάφορες θέσεις: Βρίσκετε κάποια διαφορά στα γραφήματα των σημείων M και N;
- 2.4 Αναζητήστε τον ορισμό της συνάρτησης και απαντήστε στο ερώτημα: "Σε ποια από τις δύο συμμεταβολές (h,d) και (q,d) έχουμε συνάρτηση;"¹⁵



3ο στάδιο (Γεωμετρική επέκταση)

- 3.1 Ανοίξτε το διακόπτη «Γραμμή M» και μετακινήστε το σημείο Π_1 διαδοχικά σε κάποιο σημείο του τμήματος AB και τέλος στις θέσεις A και B. Τί παρατηρείτε τώρα για τη γραμμή που διαγράφει το σημείο M;

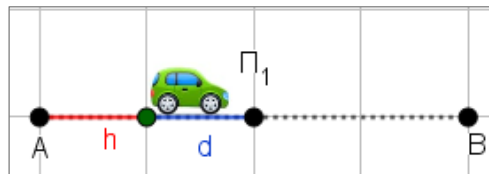


¹⁵ Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι είναι εξαιρετικά δύσκολο (αν όχι απίθανο) να υπάρξει αλγεβρική αιτιολόγηση στο ερώτημα “γιατί αυτό το είδος συμμεταβολής δεν αντιστοιχεί σε συνάρτηση». Η συγκεκριμένη -σχεδόν ανυπέρβλητη- δυσκολία θεωρούμε ότι προσδίδει πρόσθετη διδακτική αξία στη γεωμετρική προσέγγιση της δραστηριότητας που περιγράφεται στο 3^ο στάδιο και ειδικότερα στο ερώτημα 3.10, το οποίο στοχεύει να δημιουργήσει μέσω γεωμετρικών αναφορών το εννοιολογικό υπόβαθρο για την απάντηση του ερωτήματος.



3.2 Να αιτιολογήσετε τη μορφή της γραμμής που διαγράφει το σημείο M όταν η θέση του σημείου Π_1 είναι στο A ή στο B.

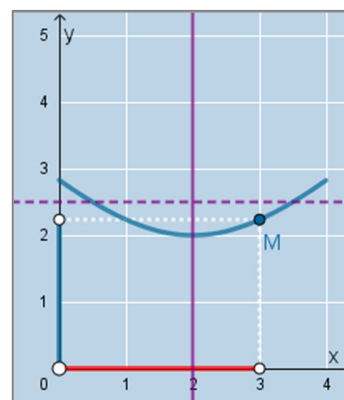
3.3 Κλείστε τους διακόπτες «Γραμμή M» και «Γραμμή N». Δίνεται η διπλανή διάταξη των σημείων A και B με το σημείο Π_1 να είναι στο **μέσο** του AB. Να εικάσετε τη μορφή της γραμμής του σημείου M και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Επαληθεύστε την με άνοιγμα του διακόπτη «Γραμμή M».



3.4 Στο σχήμα δίνεται η γραμμή που διαγράφει το σημείο M, η οποία είναι συμμετρική ως προς την κατακόρυφη ευθεία που περνά από το σημείο (2,0) του άξονα xx' .

Να προσαρμόσετε κατάλληλα το δρόμο AB και την Πόλη1 ώστε να πάρετε τη συγκεκριμένη γραμμή.

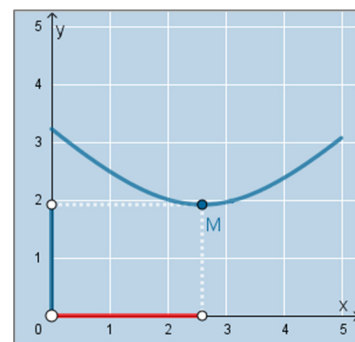
- Σε ποια ευθεία φαίνεται να ανήκει το σημείο Π_1 ;
- Πώς ερμηνεύεται από τη διάταξη των σημείων A,B και Π_1 η συμμετρία της καμπύλης του M;¹⁶



3.5 Δίνεται η γραφική παράσταση του σχήματος.

I. Τι παρατηρείτε για τη θέση του σημείου M σε σχέση με τα υπόλοιπα σημεία της γραφικής παράστασης;

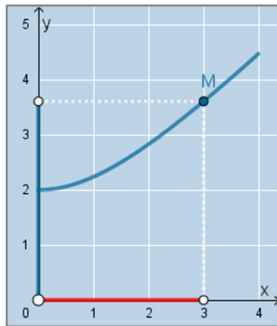
II. Σε ποιο σημείο της διαδρομής AB του αυτοκινήτου θα έχουμε τη συγκεκριμένη θέση για το σημείο M; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



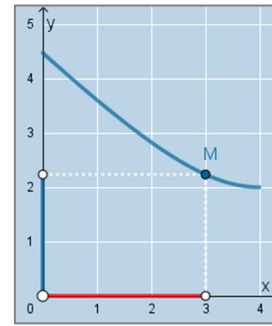
3.6 Στο επόμενο σχήμα (βλ. σχήμα I) δίνεται η γραμμή που διαγράφει το σημείο M, για την οποία παρατηρούμε ότι όσο **αυξάνει το h αυξάνει και το d**. Να προσαρμόσετε κατάλληλα τα σημεία A, B και Πόλη1 ώστε να προκύπτει τέτοιας μορφής γραμμή και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την κατασκευή σας.

¹⁶ Σημειώνουμε ότι σε αυτό το σημείο και εφόσον έχει διδαχθεί ο ν. συνημιτόνων, είναι δυνατό να προστεθεί και το ερώτημα “να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $h(d)$ ”.





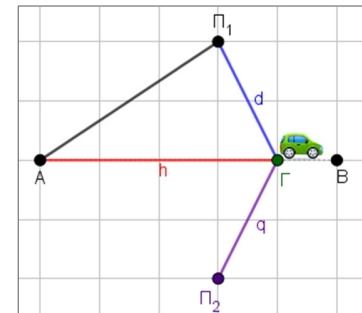
σχήμα I



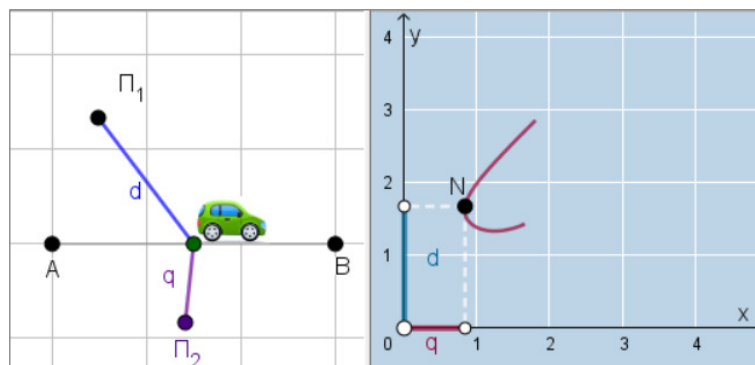
σχήμα II

3.7 Επαναλάβετε την προηγούμενη εργασία ώστε να έχετε καμπύλη όπως στο σχήμα II όπου όσο **αυξάνεται το h μειώνεται το d** . Αιτιολογήστε γεωμετρικά την κατασκευή σας.

3.8 Τοποθετήστε τα σημεία Π_1 και Π_2 όπως φαίνεται στο σχήμα (δηλαδή η AB να είναι μεσοκάθετος του $\Pi_1\Pi_2$) και εμφανίστε τη γραμμή που διαγράφει το σημείο N . Τι παρατηρείτε τώρα για το γράφημα του σημείου N ; Πρόκειται για γράφημα συνάρτησης; Σε καταφατική απάντηση, να αιτιολογήσετε κάνοντας χρήση των γεωμετρικών ιδιοτήτων του σχήματος.



3.9 Στην επόμενη διάταξη των πόλεων Π_1 και Π_2 (η ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ δεν είναι κάθετη στην AB) διαπιστώθηκε ότι η συμμεταβολή της μεταβλητής d με τη μεταβλητή q , **δεν** είναι συνάρτηση. Με βάση τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης των πόλεων να αιτιολογήσετε γιατί αυτή η συμμεταβολή δεν είναι συνάρτηση.



3.10 Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, βρείτε ένα σύνολο των σχετικών θέσεων των σημείων Π_1 και Π_2 για τις οποίες το γράφημα του σημείου N αντιστοιχεί σε **γράφημα συνάρτησης**.

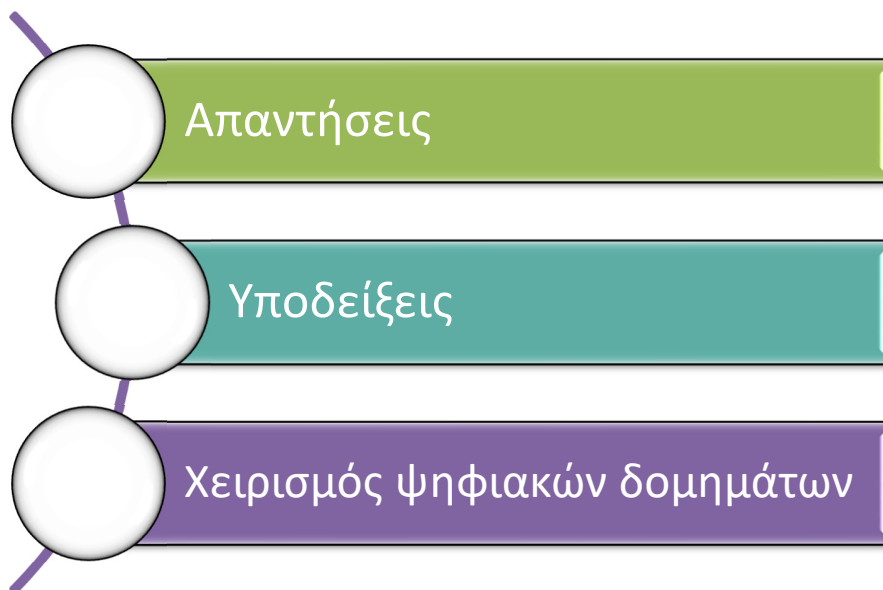


3.11 Αιτιολογήστε με βάση τον ορισμό της συνάρτησης, γιατί η συμμεταβολή $d(h)$ στο 1^ο πείραμα, αποτελεί συνάρτηση, για κάθε θέση του σημείου Π_1 σε σχέση με το δρόμο AB.



η δυναμική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα σύγχρονα Μαθηματικά

διάλογοι επικοινωνίας μεταξύ της Άλγεβρας, Αναλυτικής και Ευκλείδειας Γεωμετρίας



διδασκτικές παρεμβάσεις για τη Β΄ Λυκείου



Δραστηριότητα 9

Δ9. Ο «τετραγωνισμός» του κύκλου

1. Μήκος ημικυκλίου = πR .

2,3. Η μέση ανάλογος των τμημάτων $A'E = \beta$ και $EK = R$ είναι ένα τμήμα x με την ιδιότητα: $x^2 = \beta \cdot R$. Για την κατασκευή της, θεωρούμε το ημικύκλιο διαμέτρου

$A'K = \beta + R$ και στο σημείο E , θεωρούμε την κάθετη EN στο $A'K$. Τότε θα ισχύει ότι: $EN^2 = \beta \cdot R$ (1)

Φανερά, δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων, είναι πάντα δυνατή η κατασκευή της μέσης αναλόγου αυτών.

4. Όταν το σημείο M συμπίσει με το σημείο A' , τότε η σχέση (1) διαμορφώνεται:

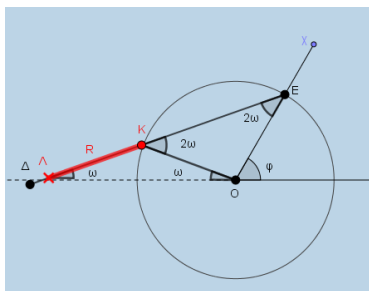
$$EN^2 = \pi R \cdot R = \pi R^2.$$

5. Όταν το σημείο M συμπίσει με το σημείο A' , τότε το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς EN ισούται με το εμβαδόν του κύκλου c .

6. Το ευθύγραμμο τμήμα $OO' = \beta$ του οποίου το μήκος ισούται με το μήκος του τόξου AA' , **δεν** μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη.

Δραστηριότητα 10

Δ10. Η τριχοτόμηση της γωνίας – Μέθοδος Αρχιμήδη



1. Είναι $KL = KO = R$ και επομένως το τρίγωνο KLO είναι ισοσκελές. Επομένως θα ισχύει $\widehat{EKO} = 2\widehat{\omega}$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου KLO .

2. Το τρίγωνο KOE είναι επίσης ισοσκελές με

$OK = OE = R$ και επομένως από το τρίγωνο EOA θα ισχύει: $\phi = \widehat{OEA} + \widehat{EAO} = 3\widehat{\omega}$ (ως εξωτερική του τριγώνου EOA).



Επομένως η γωνία $\widehat{EAO} = \frac{1}{3}\widehat{\phi}$.

3. Η κατασκευή του τμήματος KL , δηλαδή ενός τμήματος ίσο με την ακτίνα R του κύκλου (O,R) .

Δραστηριότητα 11

Δ11. Η έννοια της συνάρτησης μέσω στοιχειωδών γεωμετρικών ιδιοτήτων

1° στάδιο

1.1 Οι αποστάσεις h και d του αυτοκινήτου από το σημείο A και την Πόλη 1.

1.2 Το σημείο M έχει συντεταγμένες (h,d) .

1.3 Παρατηρήστε ότι αρχικά οι τιμές του d μειώνονται όσο αυξάνει το h . Στη συνέχεια συμβαίνει το αντίστροφο.

2° στάδιο

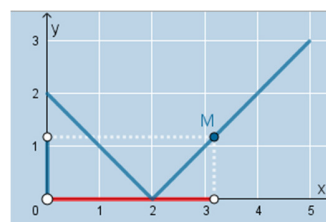
2.1 Το σημείο N έχει συντεταγμένες (a,d) .

2.2 Η κατακόρυφη ευθεία (ϵ) τέμνει το γράφημα του σημείου M το πολύ σε ένα σημείο για κάθε διάταξη των σημείων A, B και $P1$, ενώ το γράφημα του σημείου N σε δύο σημεία (εκτός εξαιρέσεων).

2.3 Το γράφημα του σημείου M αντιστοιχεί σε γράφημα συνάρτησης, ενώ του σημείου N δεν αντιστοιχεί σε γράφημα συνάρτησης.

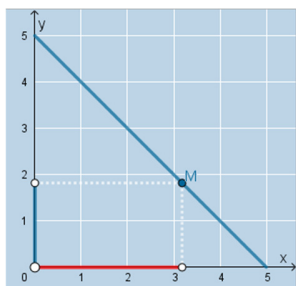
3° στάδιο (Γεωμετρική επέκταση)

3.1 Πρόκειται για τεθλασμένη γραμμή από τμήματα ευθειών.

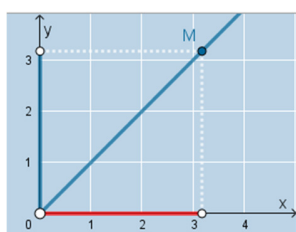


3.2 Στις περιπτώσεις που το σημείο «Πόλη 1» ταυτιστεί με το σημείο A ή το σημείο B , το γράφημα του σημείου M είναι τμήμα ευθείας. Σε αυτές τις περιπτώσεις ισχύει ότι $d(h) = AB - h$, AB : σταθερό (Σχήμα I) ή $d(h) = h$ (Σχήμα II).

Και στις δύο περιπτώσεις με $0 \leq h \leq AB$ οι τύποι είναι της μορφής $y = ax + \beta$, δηλαδή τμήματα ευθειών.



Σχήμα I



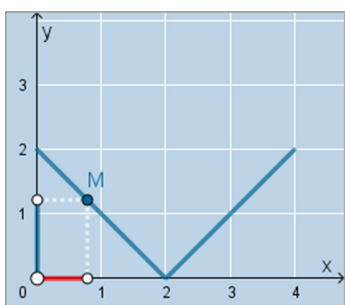
Σχήμα II

3.3 Αν καλέσουμε $\alpha = \frac{AB}{2}$ τότε θα ισχύει ότι:



$$d(h) = \begin{cases} \alpha - h, & 0 \leq h < \alpha \\ h - \alpha, & \alpha \leq h \leq 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow d(h) = |h - \alpha|, 0 \leq h \leq 2\alpha$$

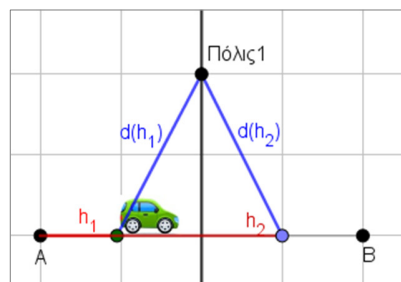
Επομένως η γραφική παράσταση θα είναι η εικονιζόμενη.



¹⁸ **Σχόλιο:** Το σημείο αυτό μπορεί να αποτελέσει αφορμή για την ιδιότητα 1-1 μίας συνάρτησης και κατ' επέκταση τής άρνησής της.



3.4 Όταν το σημείο Πόλις 1 τοποθετηθεί σε οποιοδήποτε σημείο της μεσοκαθέτου του AB, τότε η καμπύλη του σημείου M είναι συμμετρική ως προς κάποια κατακόρυφη ευθεία. Επομένως, αν $AB = 4$ τότε η γραμμή του σημείου M είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x = 2$.

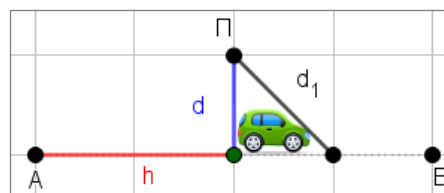


Ερμηνεία:

Για κάθε θέση h_1 του αυτοκινήτου, υπάρχει άλλη μία h_2 συμμετρική ως προς τη μεσοκάθετο για την οποία ισχύει: $d(h_1) = d(h_2)$, αφού κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα A και B.¹⁸

3.5 I. Παρατηρούμε ότι το σημείο M είναι το «*πιο χαμηλό σημείο της γραφικής παράστασης*»¹⁹.

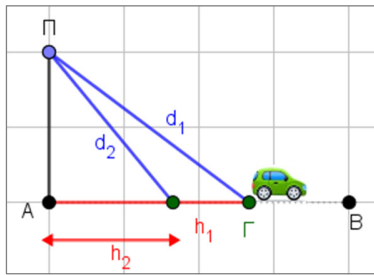
II. Αναζητάμε τη θέση του αυτοκινήτου ώστε να έχουμε το ελάχιστο d. Αυτό συμβαίνει όταν $\Pi \perp AB$ αφού σε κάθε άλλη θέση το d θα είναι **πλάγιο** τμήμα και άρα θα ισχύει: $d_1 > d$.



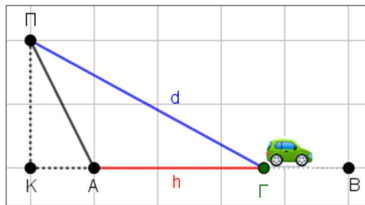
3.6 Στις περιπτώσεις των επόμενων σχημάτων με $\widehat{PA\Gamma} = 90^\circ$, για κάθε θέση του αυτοκινήτου θα ισχύει ότι:

Για δύο τυχαία $h_1 > h_2$ θα είναι και $d_1 > d_2$ (ως γνωστό, όσο το ίχνος ενός πλάγιου τμήματος απέχει περισσότερο από το ίχνος της **καθέτου** σε ένα ευθ. τμήμα, τόσο μεγαλύτερο είναι το πλάγιο τμήμα).

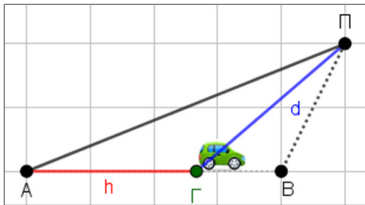
¹⁹ **Σχόλιο:** Το συγκεκριμένο ερώτημα θέτει την έννοια του ελαχίστου μίας συνάρτησης.



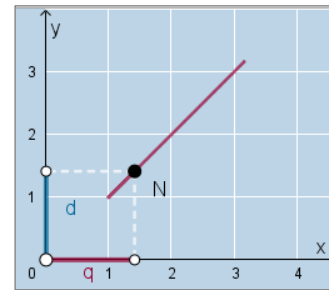
Τέλος στην περίπτωση να είναι $\hat{\Pi\Gamma} > 90^\circ$ που αποτελεί επίσης λύση του προβλήματος, η απόδειξη είναι αντίστοιχη (θεωρήστε τμήμα $\Pi\text{K} \perp \text{AB}$ και χρησιμοποιήστε την προηγούμενη ιδιότητα).



3.7 Αντίστοιχα με το ερώτημα 3.5, θα πρέπει να έχουμε τη διάταξη του επόμενου σχήματος με $\hat{\Pi\text{B}} \geq 90^\circ$. Η αιτιολόγηση είναι αντίστοιχη με το προηγούμενο ερώτημα.

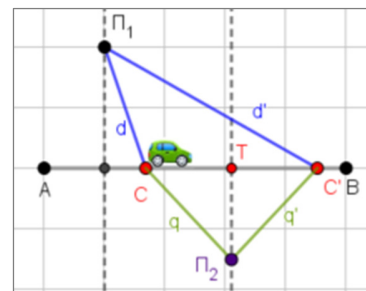


3.8 Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι το γράφημα του σημείου N είναι γράφημα συνάρτησης (αφού κάθε κατακόρυφη ευθεία, θα τέμνει το γράφημα το πολύ σε ένα σημείο).



Ερμηνεία: Στην περίπτωση που η ευθεία AB είναι μεσοκάθετος του $\Pi_1\Pi_2$ θα ισχύει ότι $d = q$ (αφού το σημείο Γ ανήκει στην AB). Επομένως το γράφημα του σημείου N, θα είναι τμήμα του γραφήματος της συνάρτησης $y = x$ (ταυτοτική συνάρτηση).

3.9 Θεωρούμε το συμμετρικό σημείο C' του σημείου C ως προς την ευθεία $\Pi_2\text{T}$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία AB. Τότε σε αυτή την περίπτωση θα είναι $d \neq d'$ και $q \neq q'$ (εφόσον η ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ δεν είναι κάθετη στην AB). Επομένως για δύο ίσες ανεξάρτητες μεταβλητές q και q' θα έχουμε διαφορετικές εξαρτημένες μεταβλητές d και άρα το γράφημα $N(q,d)$ δεν θα είναι γράφημα συνάρτησης.²⁰

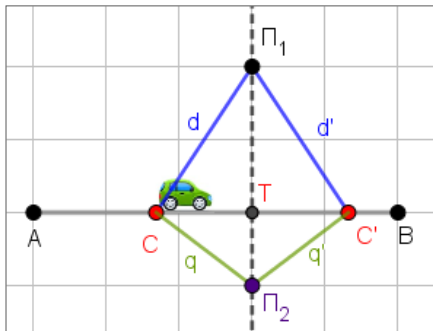


3.10 Από το προηγούμενο ερώτημα είναι άμεσο ότι για να είναι το γράφημα του σημείου N, γράφημα συνάρτησης θα πρέπει η ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ να είναι κάθετη στην ευθεία AB.

²⁰ Από την ανάλυση που προηγήθηκε και αιτιολογεί γεωμετρικά γιατί το γράφημα του σημείου N **δεν είναι γράφημα συνάρτησης**, γίνεται αντιληπτή η δυναμική τής Ευκλείδειας Γεωμετρίας

στην κατεύθυνση της ερμηνείας αλλά και αιτιολόγησης θεμάτων όπως αυτό που περιγράφηκε.





Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε θέση του αυτοκινήτου C , θα υπάρχουν οι αντίστοιχες συμμετρικές C' ως προς την ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ για τις οποίες (λόγω συμμετρίας) θα ισχύει : $AN \ q = q' \Rightarrow d = d'$, που σημαίνει ότι $d(q) = d(q')$.
Άρα, η συμμεταβολή $d(q)$ θα είναι συνάρτηση.

Σχόλιο 1: Γενικά, η σχέση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ θα είναι συνάρτηση αν και μόνο αν:
Για κάθε $\alpha, \beta \in A$ με $\alpha = \beta \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta)$.

Σχόλιο 2: Στα προηγούμενα, παρουσιάστηκε μία ικανή συνθήκη, ώστε η συμμεταβολή $d(q)$ να είναι συνάρτηση. Επομένως, τίθεται ως επακόλουθο ερώτημα, αν είναι και **αναγκαία**. Με άλλα λόγια αν υπάρχουν και άλλες διατάξεις των σημείων A, B, Π_1 και Π_2 ώστε η συμμεταβολή $d(q)$ να είναι συνάρτηση.
Τέλος σε καταφατική περίπτωση, αν είναι δυνατή η εύρεση όλων αυτών των θέσεων.

3.11 Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε h_1, h_2 με $h_1 = h_2$ θα είναι $d(h_1) = d(h_2)$.

Όμως για κάθε διάταξη των σημείων A, B και Π_1 αν ισχύει ότι $h_1 = h_2$, τότε υποχρεωτικά οι αντίστοιχες θέσεις του αυτοκινήτου θα ταυτίζονται στο δρόμο AB . Επομένως υποχρεωτικά, θα είναι και $d(h_1) = d(h_2)$.

