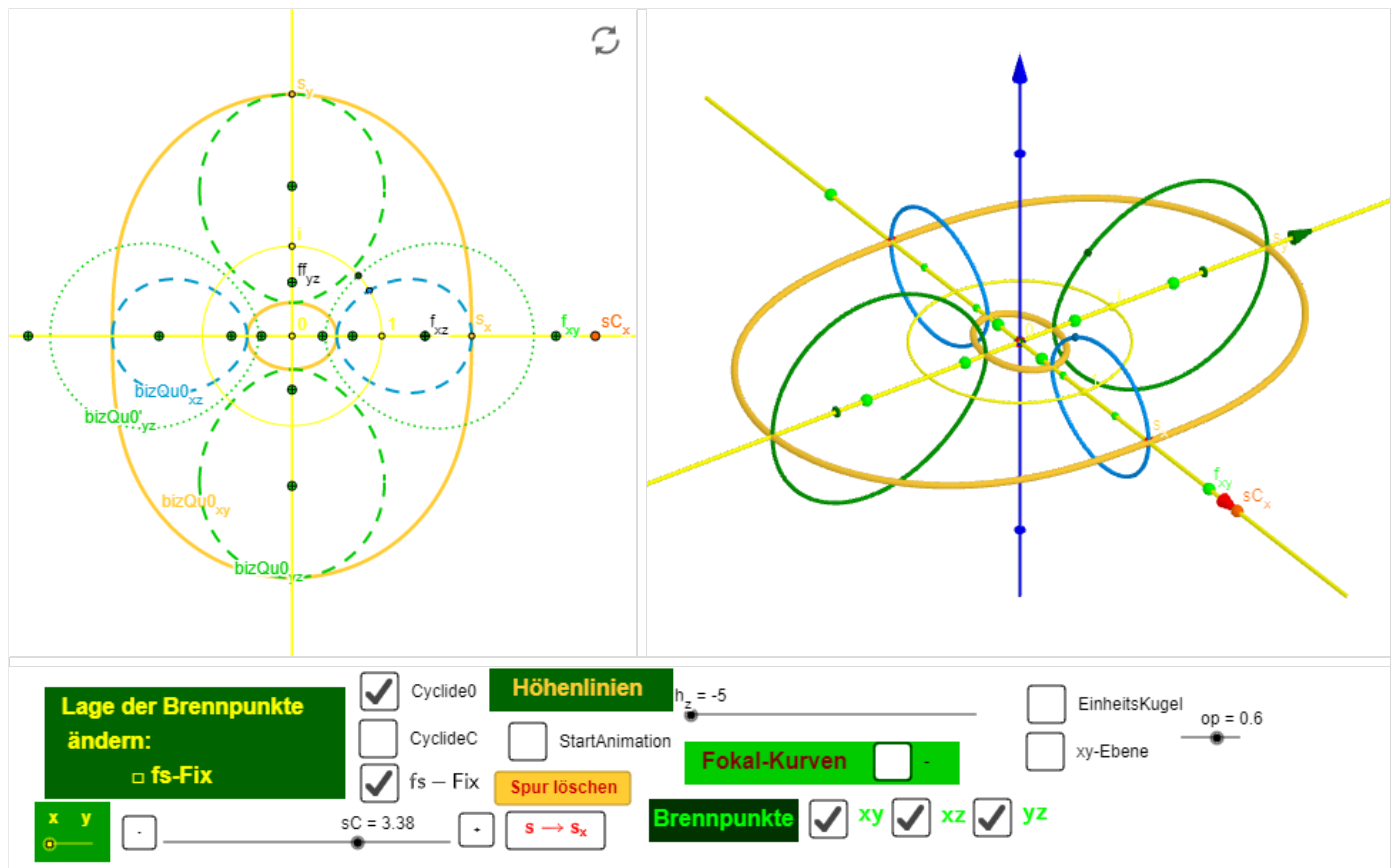


# Darboux Cycliden: Die Formeln



**Diese Aktivität ist eine Seite des geogebra-books [conics bicircular-quartics Darboux-cyclides](#) (April 2021)**

Eine **Darboux Cyclide** ist eine implizit definierte Fläche mit einer Gleichung des Typs:

- $\alpha \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^2 + L(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + Q(x, y, z) = 0$  mit linearem  $L(x, y, z)$  und quadratischem  $Q(x, y, z)$ , jeweils mit reellen Koeffizienten

Die reell 12-dimensionale Klasse dieser Fläche ist invariant unter räumlichen **Möbiustransformationen**. Jede solche Fläche besitzt mindestens eine **Symmetrie-Kugel**, dh. eine **Kugel**, an welcher gespiegelt die Fläche invariant ist. <sup>1)</sup>s.u.

Wählt man eine solche **Symmetrie-Kugel** als (komplexe) Koordinaten-Ebene, so ist die Schnittkurve eine **bizirkulare Quartik**.

**Bizirkulare Quartiken** lassen sich charakterisieren über die Anzahl der paarweise orthogonalen **Symmetrie-Kreise**. <sup>2)</sup>

Im obigen Applet ist die **bizirkulare Schnittkurve 2-teilig**, mit einer geeigneten **Möbiustransformation** erreicht man,

dass die **Cyclide** symmetrisch zu den **Koordinatenebenen**, zur **Einheitskugel** und zu einer weiteren orthogonalen

imaginären **Kugel** liegt <sup>4)</sup>. Die Gleichung der **Cyclide** reduziert sich auf

- $\text{darboux}(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2 \cdot A_x \cdot x^2 - 2 \cdot B_y \cdot y^2 - 2 \cdot C_z \cdot z^2 + 1 = 0$

Wir betrachten die **Koordinatenebenen** als komplexe **Gauss'sche Zahlenebenen**, damit vereinfachen sich viele Rechnungen.

**Punkte**, welche für die **Cyclide** eine Rolle spielen, treten wegen der **Symmetrieen** in den Ebenen stets als **Quadrupel** auf:

$p, -p, \frac{1}{p}, -\frac{1}{p} \in \mathbb{C}$ , von den wenigen Ausnahmen  $0, \infty, 1, -1, i, -i$  abgesehen.

Leider kennen wir für diese **Darboux Cycliden** keine Parameterdarstellung <sup>5)</sup>.

-  
-  
-  
-  
-

**Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:**

- $s_x, -s_x, 1/s_x, -1/s_x := \pm \sqrt{A_x \pm \sqrt{A_x^2 - 1}}, s_y, -s_y, \frac{1}{s_y}, -\frac{1}{s_y} := \pm i \cdot \sqrt{B_y \pm \sqrt{B_y^2 - 1}},$   
mit  $s_z := \sqrt{C_z + \sqrt{C_z^2 - 1}}$  ergeben sich die **Schnittpunkte** mit der  $z$ -Achse  $(0, 0, \pm s_z), (0, 0, \frac{\pm 1}{s_z})$ .

**Schnittpunkte mit den Einheitskreisen in den Koordinatenebenen:**

- $s_E := \pm \sqrt{\frac{B_y - 1}{B_y - A_x}} \pm i \cdot \sqrt{\frac{1 - A_x}{B_y - A_x}}$  liefert die Schnittpunkte mit dem **Einheitskreis** der  $xy$ -Ebene;  
entsprechend berechnet man die Schnittpunkte mit den **Einheitskreisen** der anderen Koordinatenebenen,  
sofern sie existieren.

**Brennpunkte:**

Einzelne **Darboux Cycliden** gehören stets zu einer Schar **konfokaler Darboux Cycliden**: gemeinsam sind die **3\*4 Brennpunkte**,  
zusammenfallende **Brennpunkte** mitgezählt.

- Mit  $Q_{xy} := \frac{1 - A_x \cdot B_y}{A_x - B_y} =: -Q_{yx}$  berechnet man das **Brennpunkt-Quadrupel**  $f_{xy} := \pm \sqrt{Q_{xy} \pm \sqrt{Q_{xy}^2 - 1}}$   
in der  $xy$ -Ebene. Diese Rechnung liefert komplex die **Brennpunkte** auch dann, wenn sie auf dem **Einheitskreis** liegen!!

Zu den fantastischen Möglichkeiten, in **geogebra komplex** zu rechnen, siehe die **Hinweise** und Bemerkungen unten! <sup>3)</sup>

Für die  $xz$ - und die  $yz$ -Ebene wurden oben die zugehörigen **bizirkularen Schnittquartiken** in der  $xy$ -Ebene  $\mathbb{C}$  dargestellt.

Deren **Brennpunkte** berechnen sich mit Hilfe der entsprechenden Formeln für  $Q_{xz}$  und  $Q_{yz}$ .

Die **Brennpunkte** müssen in die zugehörigen Koordinatenebenen gedreht werden.

Leider unterstützt **geogebra** keine **impliziten Kurven** in der  $xz$ - bzw. der  $yz$ -Ebene.

**Implizite Kurven** in der  $xy$ -Ebene lassen sich in den Raum **verschieben**, aber nicht **drehen**.

Die **Höhenlinien** sind verschobene **implizite Kurven**, die **bizirkularen Quartiken**

in den anderen Ebenen sind als **Ortskurven** erzeugt - und daher manchmal etwas instabil!

Man variiere im Applet oben die Koeffizienten  $A_x, B_y, C_z$  (**fs-Fix** entsperren!) und beobachte die

**Brennpunkte**.

Die Koeffizienten  $A_x, B_y, C_z$  bestimmen die Lage der **Brennpunkte**.

Diese sind entscheidend für die **Form** und die **Eigenschaften** der **Darboux Cyclide**!

**Konfokale Cycliden, Fokal-Kurven:**

Durch jeden Punkt des **Möbiusraumes**, von den **Brennpunkten** abgesehen, gehen genau 3 **orthogonale konfokale Darboux Cycliden**.

Die Koordinatenebenen und die Einheitskugel zählen dabei mit.

Auf den Achsen gibt es also zu fast jedem Punkt eine "echte" **Darboux Cyclide** durch diesen Punkt; die **Brennpunkte**

dieser **konfokalen Cyclide** sind per definitionem dieselben.

Wie berechnet man die zugehörigen Koeffizienten  $AC_x, BC_y, CC_z$ ?

Mit dem **Schieberegler**  $sC$  wird oben zunächst ein  $x$ -Achsen Schnittpunkt  $sC_x$  (**Scheitelpunkt**) auf der  $x$ -Achse variiert.

Hiermit erhält man die Koeffizienten:

- $AC_x := \frac{1}{2} \cdot \left( sC^2 + \frac{1}{sC^2} \right)$ . Mit der oben berechneten reellen Zahl  $Q_{xy}$  ergibt sich:
- $BC_y := \frac{1 - AC_x \cdot Q_{xy}}{AC_x - Q_{xy}}$  und, da der **Scheitelpunkt**  $sC_x$  auch für die  $xz$ -Ebene **Scheitelpunkt** ist:
- $CC_z := \frac{1 - AC_x \cdot Q_{xz}}{AC_x - Q_{xz}}$

-  
-  
-  
-  
-  
-

Beachtenswert ist die auf den vielen **Symmetrieen** beruhenden Einfachheit und Symmetrie der Formeln.

Im obigen Applet ist die **Start-Lage** der **Cyclide** so gewählt, dass durch die **Scheitel** auf der  $x$ -Achse alle **Cycliden** der **konfokalen** Schar erreicht werden.

Bei anderen Ausgangslagen kann es eintreten., dass manche **Cycliden** der Schar die  $x$ -Achse **nicht** schneiden.

Dann muss man **Scheitelpunkte** auf einer der anderen Achsen zu Hilfe nehmen:

Mit Hilfe des Schiebereglers  $x \leftrightarrow y$  kann man den **Scheitelpunkt** auf der  $y$ -Achse wählen.

Besondere **Quartiken** sind diejenigen, deren **Scheitelpunkt** mit einem der **anderen Brennpunkte** übereinstimmt.

In der  $xy$ -Ebene könnte das die **Quartik** mit den **Brennpunkten**  $f_{xy}$  und dem **Scheitelpunkt**  $f_{sx}$  sein.

Diese Kurven sind die **Fokal-Kurven** der Schar. Nähern die **Scheitelpunkte** sich einer solchen Lage, so entarten

die **Cycliden** in flache Flächenstücke, deren Ränder die **Fokal-Kurven** sind.

Die Koeffizienten dieser entarteten **Cycliden** werden mit den obigen Formeln berechnet, beispielsweise mit  $sC_x = f_{sx}$ .

### Sonderfälle:

Wir haben die Gleichung im Applet **nicht** in der etwas allgemeineren Form

$$\bullet \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2 \cdot A_x \cdot x^2 - 2 \cdot B_y \cdot y^2 - 2 \cdot C_z \cdot z^2 + \delta = 0 \text{ mit } \lambda, \delta \in \{-1, 0, 1\}$$

verwendet, um die nötigen Fallunterscheidungen zu begrenzen.

- $\lambda = 0$ : **Quadriken** mit 3 **Symmetrie-Ebenen**
- $\delta = 0$ : **Quadriken** invertiert
- $\lambda = 1, \delta = -1$ : **1-teilige Darboux-Cycliden**
- **2** der Koeffizienten  $A_x, B_y, C_z$  sind gleich: **Rotations-Symmetrie**
- Einer der Koeffizienten ist gleich **1** bzw. gleich **-1**: die **Quartiken** in den zugehörigen Ebenen zerfallen in **elliptische Kreispaaire** (2 sich schneidende **Kreise**) bzw. in **hyperbolische Kreispaaire** (ohne Schnittpunkte)
- $(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2(R^2 - r^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + 4 \cdot R^2 \cdot (x^2 + y^2) + (R^2 - r^2) = 0$  sind die verschiedenen **Tori**-Typen,  $R^2 - r^2 = 1$  erreicht man durch geeignete Streckung. Der **Torus** liegt dann **symmetrisch** zur **Einheitskugel**.
- **Möbius-transformierte** der **Dupinschen Cycliden**

### Hinweise und Links:

1): Die Punkte des **Möbiusraums** kann man projektiv beschreiben in einem reellen 4-dimensionalen Raum mit nicht-ausgearteter

**Möbius-Quadrik** der Signatur  $(+, +, +, -)$ . Die Punkte des **Möbiusraums** sind dann die Punkte auf der **Möbius-Quadrik**.

Eine **Darboux Cyclide** ist der Schnitt dieser **Quadrik** mit einer 2-ten **Quadrik**.

Neben der **Möbius-Form** besitzt der zugehörige 5-dimensionale reelle Vektorraum

eine 2-te **symmetrische selbstadjungierte Bilinearform**. Dazu sollte es mindestens einen Eigenvektor geben.

2): Die Eigenräume sind paarweise orthogonal bezüglich der **Möbiusform**, bestenfalls ergeben sich 5 paarweise orthogonale **Symmetrie-Kugeln**, welche als die 3 **Koordinatenebenen**, die **Einheitskugel** und eine dazu orthogonale imaginäre Kugel gewählt werden können.

-  
-  
-

-  
-  
-  
-  
-  
-  
-  
-  
-  
-  
-

3): Obwohl im Handbuch zu lesen ist, dass **geogebra komplexe Zahlen nicht** unterstützt, kann man in **geogebra** ganz trefflich

**komplex** rechnen. Die wichtigsten Funktionen ( $\sqrt{\quad}$ , **sin**, **cos**, **exp**, **ln** ...) können als **komplexe Funktionen** behandelt werden,

Berechnungen lassen sich klaglos **komplex** durchführen!

Z.B.: die Koeffizienten  $A_x, B_y, C_z$  sind reell, die Zahlen  $Q_{xy} = \frac{1 - A_x \cdot B_y}{A_x - B_y}$  ebenfalls,

abgesehen vom Sonderfall  $A_x = B_y$ , bei welchem die **Cyclide** rotationssymmetrisch ist und **Brennpunkte** zusammenfallen!!

Die (reelle) Berechnung  $f_{xy} := \sqrt{Q_{xy} + \sqrt{Q_{xy}^2 - 1}}$  liefert in manchen Fällen

wegen des bekannten Verhaltens der **Wurzel-Funktion** bei negativen Radikanten **kein** Ergebnis.

Mit dem "Trick"  $f_{xy} := \sqrt{Q_{xy} + \sqrt{Q_{xy}^2 - 1} + 0 \cdot i}$  rechnet in **geogebra** die **Wurzel-Funktion komplex**,

und so werden in entsprechenden Fällen die **Brennpunkte** mit denselben Formeln **komplex** berechnet, wenn sie auf dem **Einheitskreis** liegen!

4): Zur **Möbiusgeometrie**:  $\leftrightarrow$  vgl. das **geogebra-book** [Moebiosebene](#)

5): Für 2-teilige **bizirkulare Quartiken** kennen wir  $\leftrightarrow$  [Parameterdarstellungen](#)

- [Walter Füchte](#)