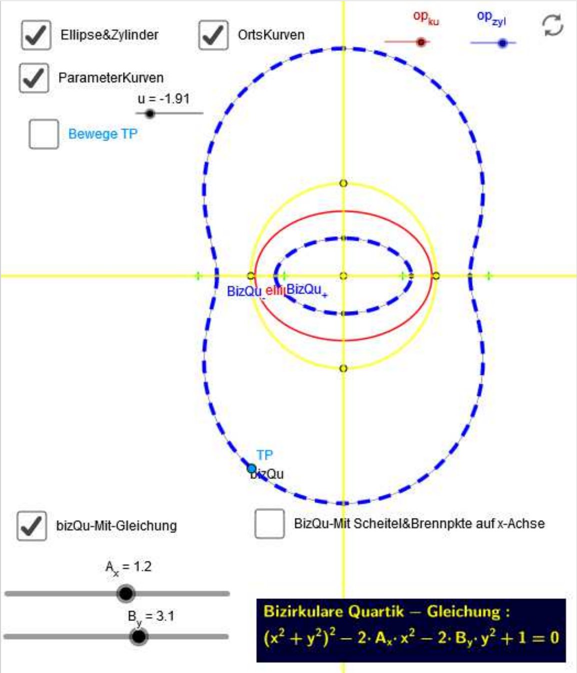
2-teilige Quartik: Parameterdarstellung



Diese Aktivität ist eine Seite des ***geogebra-books*** Moebiusebene (*31. März 2020*).

Parameterdarstellung 2-teiliger bizirkularer Quartiken in Normalform
Bizirkulare Quartiken entstehen als Schnitt der ***Möbiusquadrik*** (im Applet ist das die **RIEMANN**sche ***Zahlenkugel***) mit einer
2.-ten Quadrik:

- Schneide $x^2+y^2+z^2-1=0$ mit dem Zylinder $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 + \gamma \cdot x + \delta \cdot y + \epsilon + 0 \cdot z = 0$.
  Dies ergibt, stereographisch projiziert, $\kappa \cdot (x^2+y^2)^2 + L(x,y) \cdot (x^2+y^2) + Q(x,y) = 0$
  mit linearem L und quadratischem Q, also insgesamt eine ***Quartik*** mit 9 reellen Koeffizienten.

Ist eine solche ***bizirkulare Quartik*** **2-teilig**, so besitzt sie **4** paarweise ***orthogonale Symmetrie-Kreise***, einer davon ist imaginär.
Mit einer geeigneten ***Möbiustransformation*** erhält man die beiden Achsen und den Einheitskreis als reelle ***Symmetriekreise***.
Die Geichung reduziert sich dann auf die ***Normalform***: $(x^2+y^2)^2 - 2 \cdot A_x \cdot x^2 - 2 \cdot B_y \cdot y^2 + 1 = 0$, ↪ siehe die Seite zuvor.
Die 2-teilige Form erklärt sich als Schnitt der **RIEMANN**schen ***Zahlenkugel*** mit einem achsen-symmetrischen ***elliptischen Zylinder***, der die Kugel in 2 Teilen schneidet. (↪ siehe Quartik als Quadrikschnitt und das ***geogebra-book*** Kugel-Kegel-Schnitte).

Fall 1: $A_x \geq 1$ und $B_y \geq 1$
Der ***Einheitskreis*** trennt in der xy-Ebene $\mathbb{C}$ die beiden Teile, die ***Quartik*** schneidet die Achsen in den Scheitelwerten

- $s_x := \pm\sqrt{A_x \pm \sqrt{A_x^2-1}}$ und $s_y := \pm\sqrt{B_y \pm \sqrt{B_y^2-1}}$.

3D im Raum erhält man die ***Quartik*** als Schnitt des orthogonalen ***Zylinders*** über der ***Ellipse*** $a \cdot \cos(u) + i \cdot b \cdot \sin(u)$, $-\pi \leq u \leq \pi$ mit $a := \frac{2 \cdot s_x}{s_x^2+1}$ und $b := \frac{2 \cdot s_y}{s_y^2+1}$.

Daraus ergeben sich die ***Parameterdarstellungen***

- Auf der Kugel: $BizQu3D_{\{\pm\}}(u) := \left(a \cdot \cos(u), b \cdot \sin(u), \pm\sqrt{1-a^2 \cdot \cos^2(u) - b^2 \cdot \sin^2(u)}\right)$, $-\pi \leq u \leq \pi$

und ***stereographisch projiziert***

- in der Ebene $\mathbb{C}$: $BizQu_\pm(u) := \frac{1}{1 \pm \sqrt{1-a^2 \cdot \cos^2(u) - b^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot (a \cdot \cos(u) + i \cdot b \cdot \sin(u))$, $-\pi \leq u \leq \pi$.

Für $A_x = 1$ oder $B_y = 1$ zerfällt die "***bi-zirkulare" Quartik*** in 2 ***Kreise***, die sich in ± 1 oder in $\pm i$ schneiden.
Zwei ***konzentrische Kreise*** ergeben sich, wenn $A_x = B_y$ ist.

– Walter Füchte

Die ***bizirkulare Quartik*** schneidet die x-Achse in den oben berechneten Scheiteln s_x,
und den ***Einheitskreis*** in den Punkten $sE = sE_x + i \cdot sE_y$ mit $sE_x = \sqrt{\frac{B_y - 1}{B_y - A_x}}$ und $sE_y = \sqrt{\frac{1 - A_x}{B_y - A_x}}$, die y-Achse wird nicht geschnitten.
Die ***Möbiustransformation*** $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$ mit $-1 \mapsto \infty \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto -1$ bildet den ***Einheitskreis*** auf die y-Achse ab, das Bild der ***Quartik*** ist vom obige Typ (***Fall1***). Die inverse ***Möbiustransformation*** ist $T^{-1}(z) = \frac{1+z}{1-z}$.
Die Scheitelwerte sind $Ts_x = \frac{s_x - 1}{s_x + 1}$ und $Ts_y = Im(T(sE))$.
Für die ***Ellipse*** erhält man die Werte $a_T = \frac{2 \cdot Ts_x}{Ts_x^2 + 1}$ und $b_T = \frac{2 \cdot Ts_y}{Ts_y^2 + 1}$ und daraus die

Parameterdarstellungen

- **3D** Auf der Kugel: $TBizQu3D_{\pm} := \left(\pm\sqrt{1 - b_T^2 \cdot \cos^2(u) - a_T^2 \cdot \sin^2(u)}, b_T \cdot \cos(u), a_T \cdot \sin(u)\right)$, $-\pi \le u \le \pi$
- In $\mathbb{C}$: $TBizQu_{\pm} := T^{-1}\left(\frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - a_T^2 \cdot \cos^2(u) - b_T^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot (a_T \cdot \cos(u) + i \cdot b_T \cdot \sin(u))\right)$, $-\pi \le u \le \pi$

Fall 3: $A_x \le 1$ und $B_y \ge 1$ Die ***Quartik*** schneidet die y-Achse und den ***Einheitskreis***.
Die Möbiustransformation $Ti(z) = \frac{z - i}{1 - i \cdot z}$ mit $0 \mapsto -i \mapsto \infty \mapsto i \mapsto 0$ bildet den ***Einheitskreis*** auf die x-Achse ab.
Scheitelwerte sind $Tis_y = Im(Ti(i \cdot s_y))$ und $Tis_x = Re(Ti(sE))$.
Für die ***Ellipse*** erhält man die Werte $a_{Ti} = \frac{2 \cdot Tis_x}{Tis_x^2 + 1}$ und $b_{Ti} = \frac{Tis_y}{Tis_y^2 + 1}$ und daraus die

Parameterdarstellungen

- **3D** Auf der Kugel: $TiBizQu3D_{\pm} := \left(a_{Ti} \cdot \cos(u), \pm\sqrt{1 - a_{Ti}^2 \cdot \cos^2(u) - b_{Ti}^2 \cdot \sin^2(u)}, b_{Ti} \cdot \sin(u)\right)$, $-\pi \le u \le \pi$
- In $\mathbb{C}$: $TiBizQu_{\pm} := Ti^{-1}\left(\frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - a_{Ti}^2 \cdot \cos^2(u) - b_{Ti}^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot (a_{Ti} \cdot \cos(u) + i \cdot b_{Ti} \cdot \sin(u))\right)$, $-\pi \le u \le \pi$

Die Brennpunkte der bizirkularen Quartik:

- Für $1 \le A_x \le B_y$ und für $B_y \le -1$, $1 \le A_x$ liegen die ***Brennpunkte*** auf der x-Achse:
  $f_x = \sqrt{Q_x + \sqrt{Q_x^2 - 1}}$ mit $Q_x = \frac{2 \cdot s_x^2 - B_y \cdot (s_x^4 + 1)}{(s_x^4 + 1) - 2 \cdot B_y \cdot s_x^2}$
- Für $A_x > B_y > 1$ und für $A_x \le -1$, $1 \le B_y$ liegen die ***Brennpunkte*** auf der y-Achse:
  $f_y = \sqrt{Q_y + \sqrt{Q_y^2 - 1}}$ mit $Q_y = \frac{2 \cdot s_y^2 - A_x \cdot (s_y^4 + 1)}{(s_y^4 + 1) - 2 \cdot A_x \cdot s_y^2}$

Liegt A_x oder B_y zwischen -1 und 1, so liegen die ***Brennpunkte*** auf dem ***Einheitskreis***. Mit Hilfe der oben angegebenen ***Transformationen*** kann man sie berechnen. Für die ***Parameterdarstellung*** sind die **Brennpunkte** nicht nötig.

Da ***ge gebra*** die Wurzelfunktion auch als ***komplexe Funktion*** erkennt, kann man die ***Ellipsen-Brennpunkte*** komplex und trickreich berechnen:
$f_{\{elli\}} = \pm\sqrt{a^2 - b^2 + 0 \cdot i} + 0 \cdot i$ (ohne $+0 \cdot i$ würden für $a^2 - b^2 < 0$ keine ***Brennpunkte*** auf der y-Achse berechnet werden!)

Eine technische Bemerkung zu ***ge gebra***:

Die ***Möbiustransformation*** $T_2(z)$ läßt sich nicht direkt wie oben angegeben als Funktion von z definieren: verlangt wird eine "*explizite Funktion in* x".
Definiert man jedoch die "*Funktion in mehreren Variablen*" $T(a, b, c, d, z) := \frac{a \cdot z + b}{c \cdot c + d}$, so kann man damit jede gleichsinnige ***Möbiustransformation*** mit komplexen Zahlen a, b, c, d, z auswerten!