Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 10 - diferencias entre extremos absolutos y extremos relativos

1. Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ **.**

a) Halla los extremos absolutos de f **(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo** $[\frac{1}{e},e]$ **.**

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f **en el punto de abscisa** $x=e$ **.**

a) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$

El enunciado ya nos indica el dominio de la función: $Dom(f)=(0,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{-1+x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \quad\rightarrow\quad -1+x=0 \quad\rightarrow\quad x=1$ → punto crítico

Calculamos la segunda derivada para evaluar el candidato a extremo.

$f'(x)=\frac{-1+x}{x^2} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{x^2-(-1+x)2x}{x^4}=\frac{2-x^2}{x^3} \quad\rightarrow\quad f'(1)=1>0$ → mínimo relativo

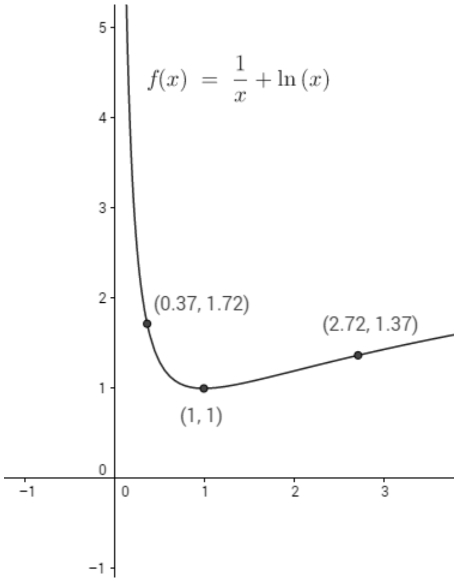
El punto del mínimo es $(1,f(1))=(1,1)$

En el intervalo $[\frac{1}{e},e]$ los extremos toman los siguientes valores en su imagen:

$$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{\frac{1}{e}}+\ln(\frac{1}{e})=e+\ln(1)-\ln(e)=e-1\approx 1{,}71$$

$$f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}\approx 1{,}37$$

Comparando los valores de las imágenes, el punto $(1,1)$ es mínimo absoluto, y el punto $(\frac{1}{e}, e-1)$ es máximo absoluto dentro del intervalo $[\frac{1}{e}, e]$.



b) En el punto $x=e \rightarrow f(e)=\frac{1+e}{e}$. La pendiente de la recta tangente será igual al valor de la derivada en $x=e$.

$$f'(x)=\frac{-1+x}{x^2} \rightarrow m=f'(e)=\frac{e-1}{e^2}$$

Y la ecuación punto-pendiente resulta:

$$\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e}=\frac{e-1}{e^2} \rightarrow \text{recta explícita: } y=x(\frac{-1}{e^2}+\frac{1}{e})+\frac{2}{e}$$

2. Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t)=t\,e^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo.

Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a cero.

$$c'=0 \;\rightarrow\; c'=e^{-t/2}+t\,e^{-t/2}(-1/2) \;\rightarrow\; e^{-t/2}+t\,e^{-t/2}(-1/2)=0 \;\rightarrow\; e^{-t/2}\left(1-\frac{t}{2}\right)=0$$

La exponencial nunca se anula, por lo que la única solución posible resulta:

$$1-\frac{t}{2}=0 \;\rightarrow\; t=2\,horas$$ → punto crítico

Aplicamos la condición suficiente evaluando el signo de la segunda derivada en el punto crítico.

$$c''=e^{-t/2}(-1/2)+e^{-t/2}(-1/2)+t\,e^{-t/2}(1/4)$$

$$c''(2)=\frac{-e^{-1}}{2}-\frac{e^{-1}}{2}+\frac{e^{-1}}{2}=\frac{-e^{-1}}{2}<0 \;\rightarrow\; t=2\,horas$$ es un máximo relativo

La concentración que se alcanza en el momento de máximo relativo será la imagen de la función $c(t)$ para $t=2\,horas$.

$$c(2)=2\,e^{-1}=\frac{2}{e}\simeq 0{,}74$$

La función $c(t)$ solo presenta un extremo relativo, por lo que al ser continua en toda la recta real por ser producto de polinomio y exponencial, el máximo relativo también será absoluto.

Como la concentración máxima resulta $0{,}74\,mg/ml<1\,mg/ml$, en ningún momento hay riesgo para el paciente.

3. Obtener extremos absolutos de $f(x)=(x^2-3)e^{-x+2}$ **en el intervalo** $[-2,4]$ **.**

Obtenemos los extremos relativos, anulando la primera derivada.

$f'(x)=2xe^{-x+2}+(x^2-3)e^{-x+2}(-1) \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow e^{-x+2}(2x-x^2+3)=0$

La exponencial nunca se anula, por lo tanto:

$-x^2+2x+3=0$ --> $x=-1$, $x=3$ → puntos críticos

Con la segunda derivada comprobamos si estamos ante un máximo o un mínimo.

$f''(x)=2e^{-x+2}+2xe^{-x+2}(-1)-2xe^{-x+2}-(x^2-3)e^{-x+2}(-1)$

$f''(-1)>0 \rightarrow x=-1$ mínimo relativo → su imagen $f(-1)=-40{,}17$

$f''(3)<0 \rightarrow x=3$ máximo relativo → su imagen $f(3)=2{,}21$

Además, evaluamos la imagen de los extremos del intervalo.

$x=-2 \rightarrow f(-2)=54{,}60$

$x=4 \rightarrow f(4)=1{,}76$

Tendremos un máximo absoluto en la mayor imagen: $(-2,54{,}60)$

Y un mínimo absoluto en la menor imagen: $(-1,-40{,}17)$

4. Obtener extremos absolutos de $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}}$ **.**

No nos dan intervalo donde estudiar los extremos absolutos, por lo asumimos todo el dominio de definición de la función.

$$Dom=\mathbb{R}-\{e^{x}+e^{-x}=0\}$$

¿Qué valores anulan al denominador? Ninguno, porque la exponencial nunca se hace cero y nunca toma valores negativos. Por lo tanto, la expresión del denominador nunca se hace cero. El dominio es toda la recta real.

La condición necesaria de extremo relativo pide que la primera derivada sea igual a cero. Derivamos como una función inversa.

$$f'(x)=\frac{-(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^{2}} \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow -(e^{x}-e^{-x})=0 \rightarrow e^{x}=e^{-x}$$

Aplicamos logaritmo neperiano a ambos lados, para cancelar la exponencial.

$x=-x \rightarrow x=0$ (punto crítico).

Situamos el candidato a extremo relativo en la recta real, y evaluamos la derivada a la izquierda y a la derecha de x=0.

$f'(-10)>0$ → derivada positiva → función $f(x)$ estrictamente creciente a la izquierda de x=0

$f'(10)<0$ → derivada negativa → función $f(x)$ estrictamente decreciente a la izquierda de x=0

Por lo tanto, en x=0 tenemos un máximo relativo. Al ser el único extremos relativo en toda la recta real, también será máximo absoluto.

Solo nos falta obtener la imagen del máximo absoluto.

$$f(0)=\frac{1}{e^{0}+e^{-0}}=\frac{1}{2}$$

Conclusión: máximo relativo y absoluto en el punto $(0,\frac{1}{2})$