verloop exponentiële en logaritmische functies

www.karelappeltans.be

September 13, 2020

1 herhaling

1.1 logaritmen

1.1.1 begripsvorming

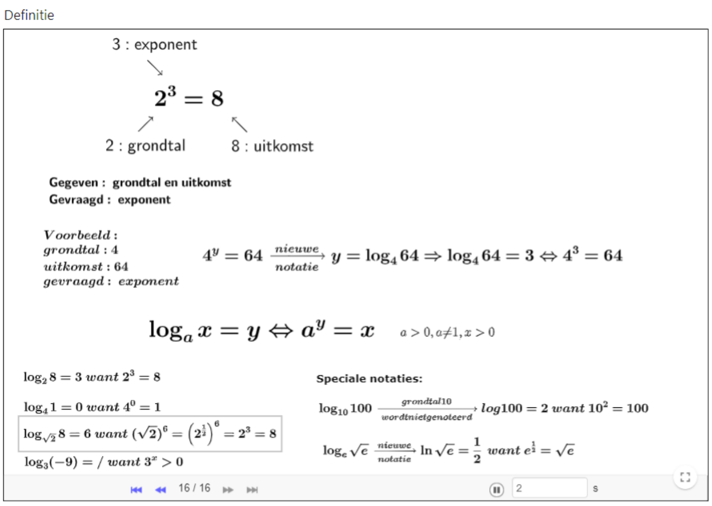


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF

1.1.2 rekenregels

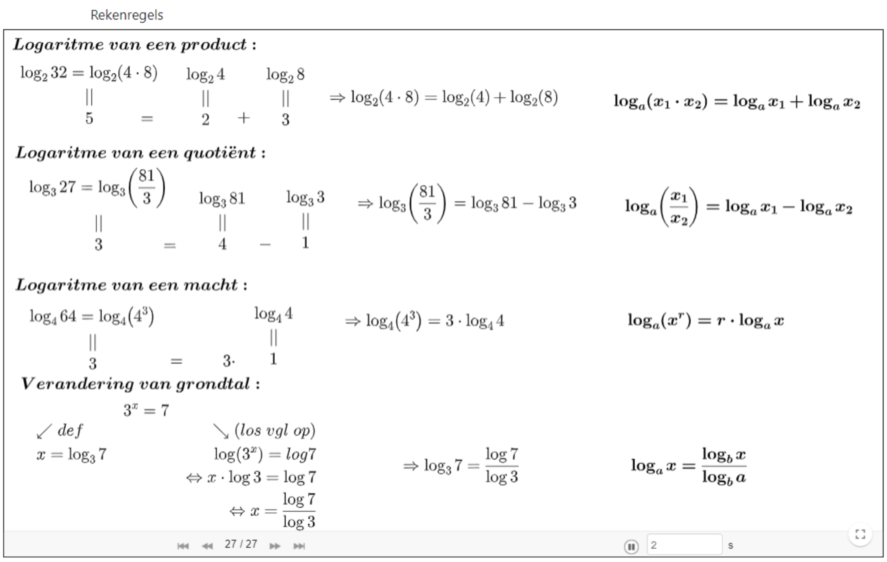


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF

1.2 grafieken exponentiële en logaritmische functies en hun verband

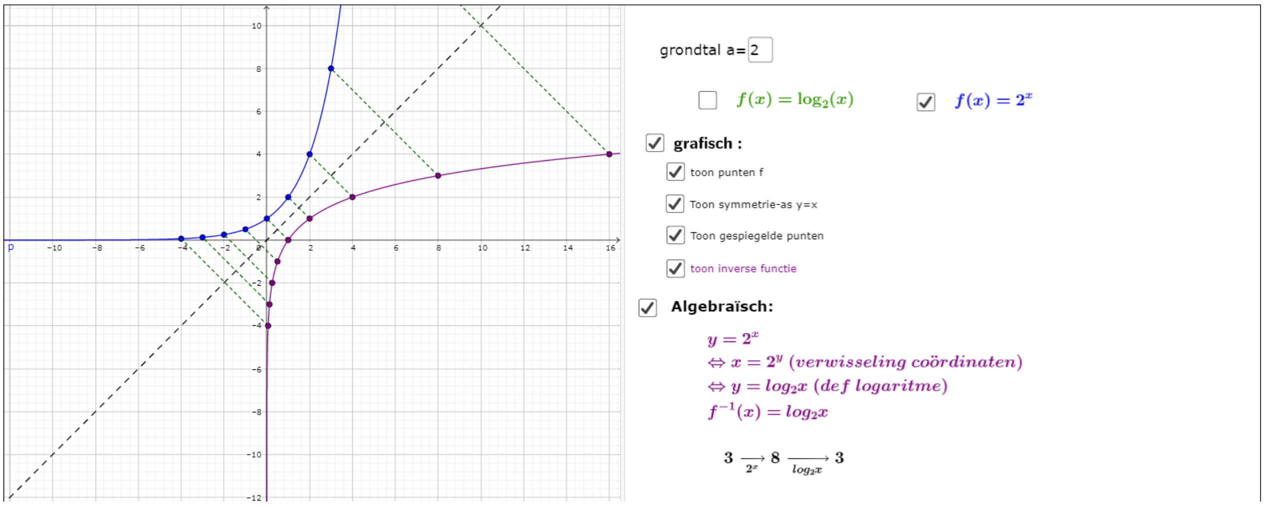


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/YYevVAPy

2 het getal e

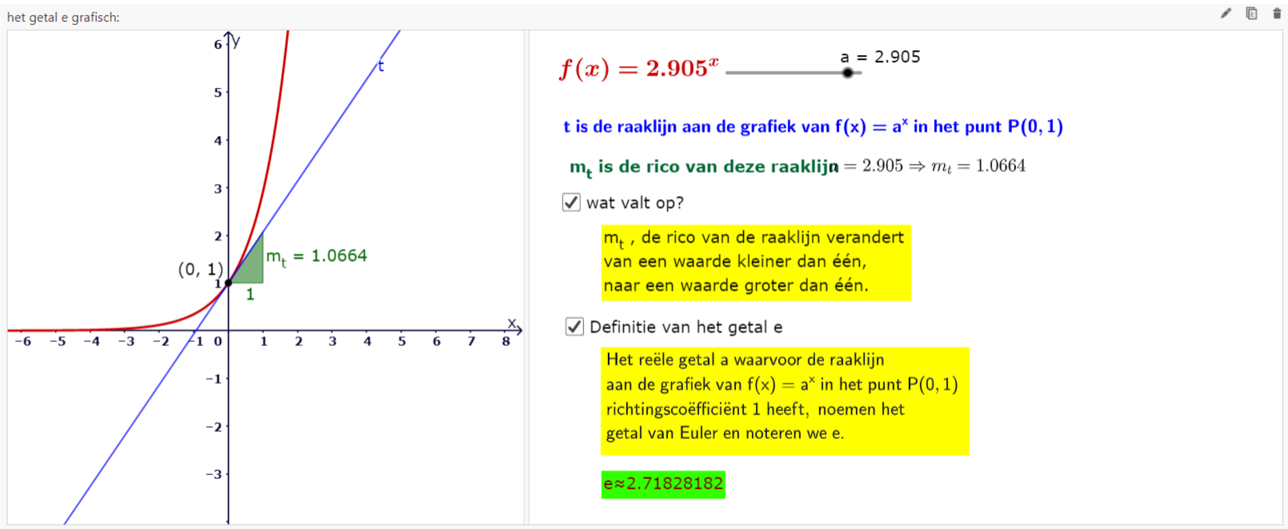


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW

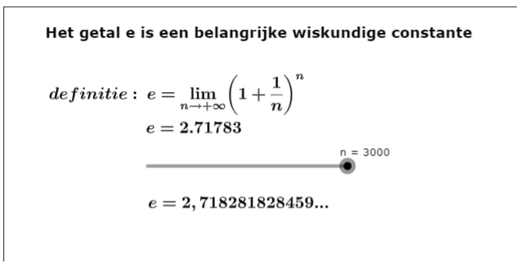


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW

3 rekenregels

Rekenregels exponenten (op voorwaarde dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn). m en n zijn gehele getallen.

1. $e^m \cdot e^n = e^{m+n}$
2. $(e^m)^n = e^{mn}$
3. $\dfrac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$
4. $e^{-m} = \dfrac{1}{e^m}$
5. $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$
6. $e^0 = 1$
7. $e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m} = \left(\sqrt[n]{e}\right)^m$

Rekenregels logaritmen (op voorwaarde dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn)

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3. $\ln\left(x^r\right) = r \cdot \ln(x)$
4. $\ln\left(e^x\right) = x$
5. $e^{\ln(x)} = x$
6. $\ln(e) = 1$
7. $\ln(1) = 0$

Figure 6: https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm

4 exp en log functies met grondtal e

grafieken

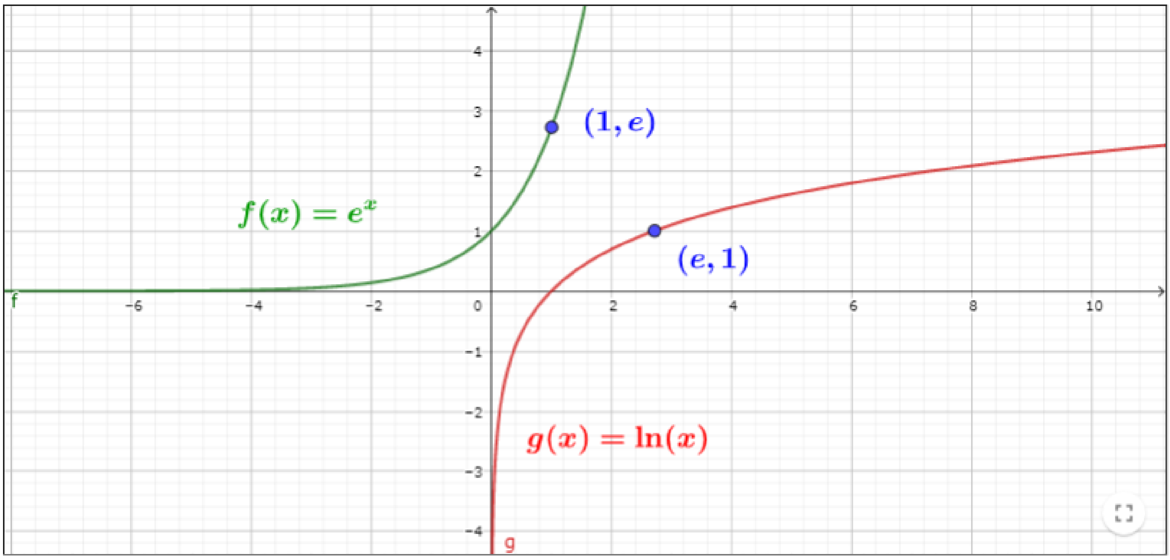


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm

5 Rekenregels afgeleide

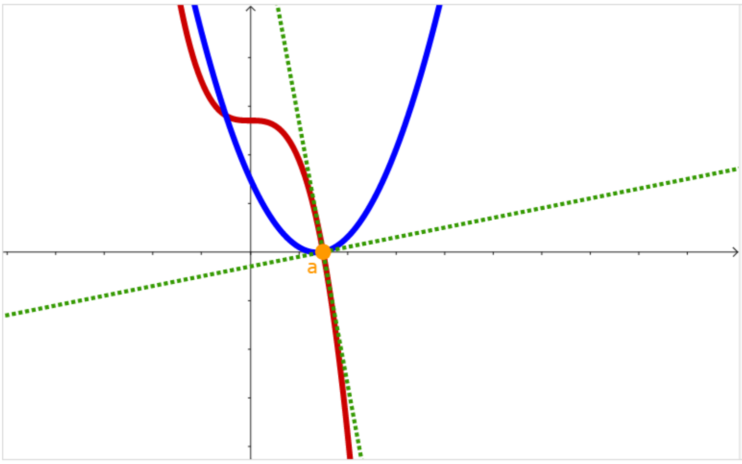
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$(e^{\square})' = e^{\square} \cdot \square'$
$f(x) = a^x \quad (a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$	$f'(x) = a^x \ln a$	$(a^{\square})' = a^{\square} \ln a \cdot \square'$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(\ln \square)' = \frac{1}{\square} \cdot \square'$
$f(x) = {}^a\log x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$({}^a\log \square)' = \frac{1}{\square \ln a} \cdot \square'$

Figure 8: https://www.geogebra.org/m/rkbXbnRv

6 Regel van L'Hospital

Bij de berekening van een limiet kunnen volgende onbepaaldheden zich voordoen:
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$.
De regel van L'Hôpital kan onder bepaalde voorwaarden deze onbepaaldheden opheffen.
Onderstel dat de functies f en g afleidbaar zijn in een omgeving van $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, behalve in a, en dat $g'(x) \neq 0$ in deze omgeving van a, behalve eventueel in a.
Voor de eerste twee onbepaaldheden geldt dan volgende formule:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ of } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



Regel van de l'Hospital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to a} \frac{f'(a).\cancel{(x-a)}}{g'(a).\cancel{(x-a)}} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Als x voldoende dicht bij a ligt, ligt graf f (graf g) voldoende dicht bij de raaklijn $t_{a,f}$ ($t_{a,g}$).

$$t \leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(a).(x-a) + f(a)}{g'(a).(x-a) + g(a)}$$

14 / 14 2 s

Figure 9: https://www.geogebra.org/m/D8F7EpY4

7 Verloop

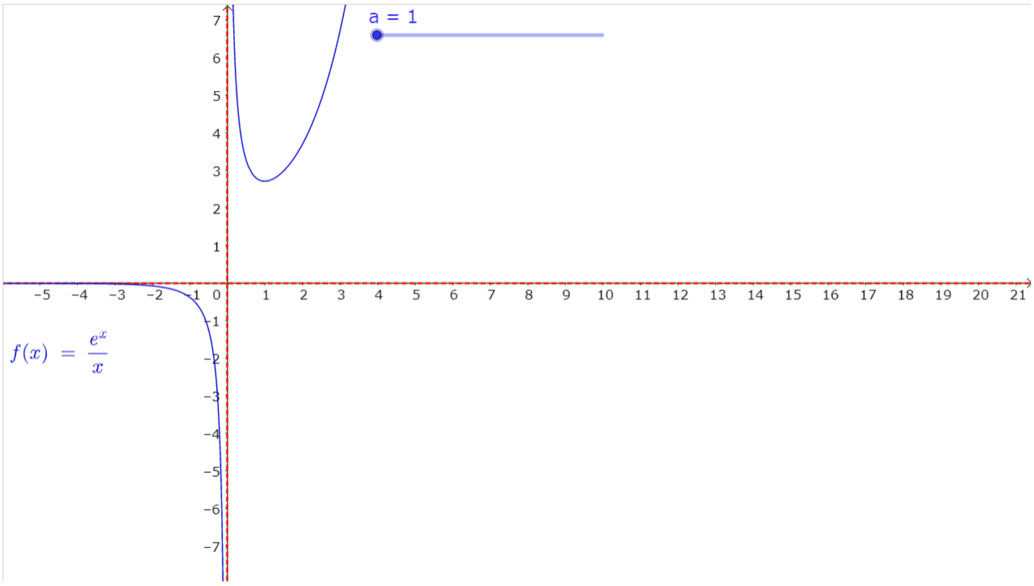


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/qy3vtkdb

8 Toepassingen

8.1 Extremumproblemen

8.2 Kettinglijn

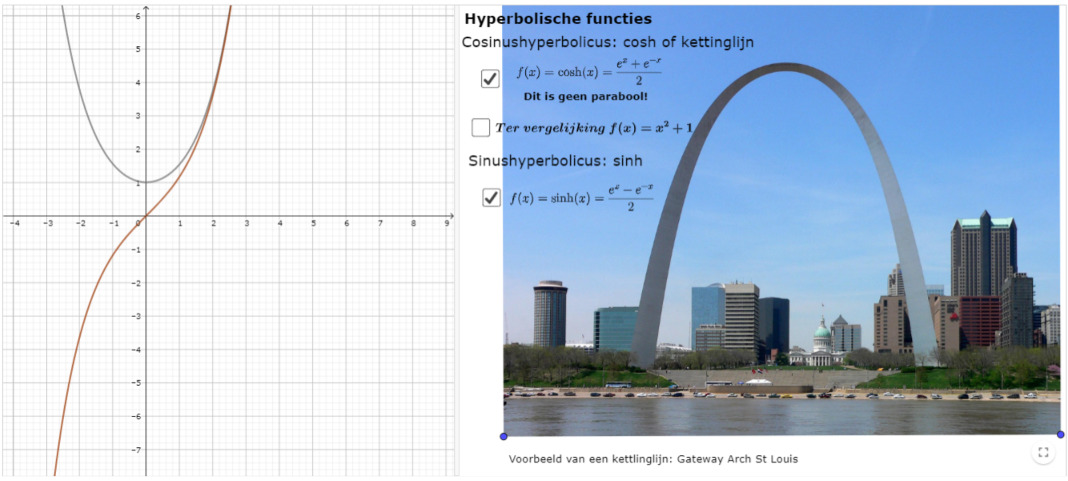


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/d8enj4ud

8.3 Continuïteit

Definitie continuïteit:
De functie is continu voor x=a als $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

8.4 raaklijn en toepassingen

Vergelijking raaklijn in $P(a, f(a)$: y-f(a)=f'(a)(x-a)

8.4.1 raakpunt is gegeven

Bepaal de vergelijking van de raaklijn t in $P(e, f(e))$ met $f(x) = x \cdot (lnx)^2$

8.4.2 raakpunt is niet gegeven

Gegeven $f(x) = \frac{2+2lnx}{x}$. Bepaal de rechte door de oorsprong en die de grafiek van f raakt

9 Groeimodellen

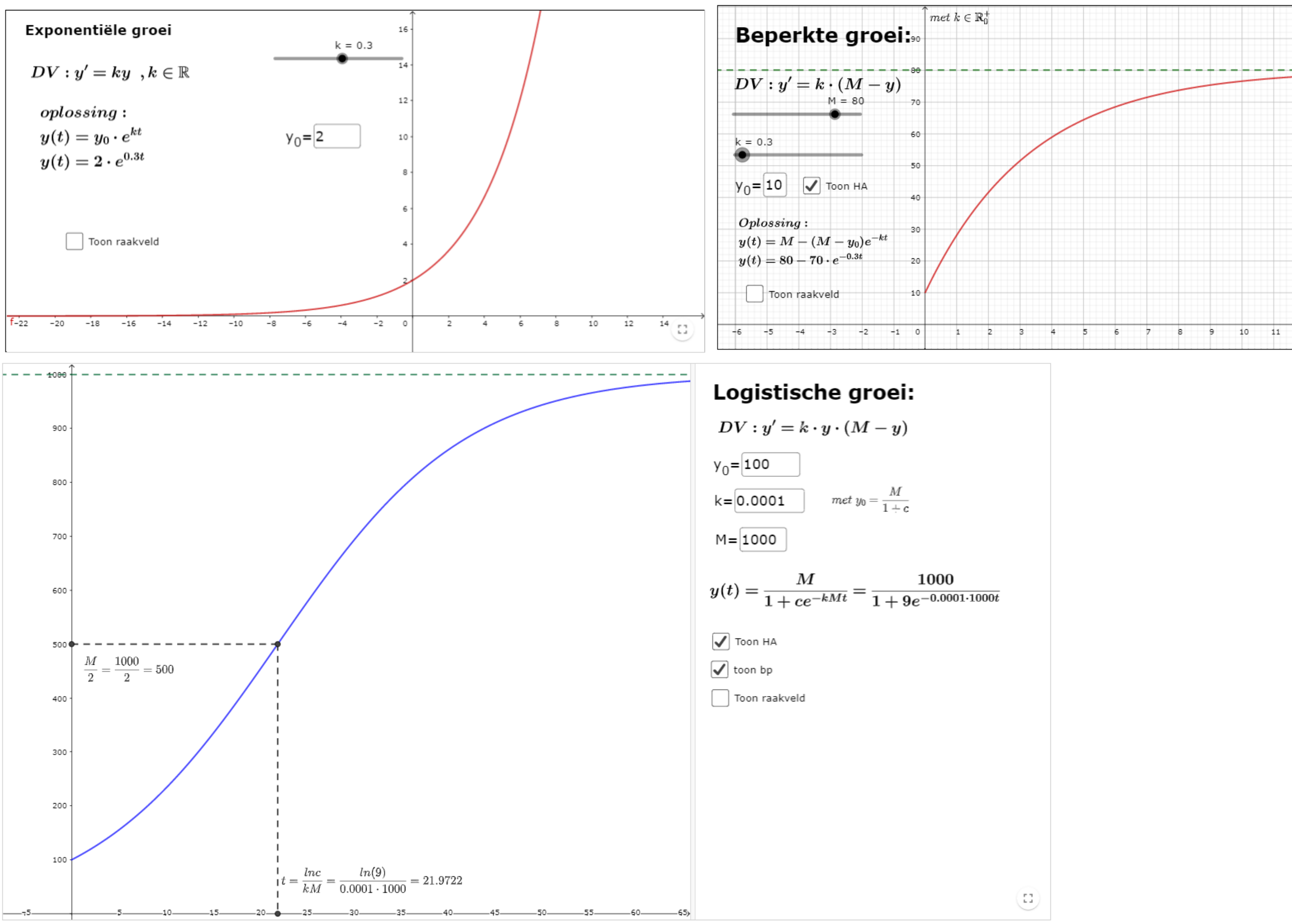


Figure 12: `https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ`]https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ

10 oefeningen

10.1 herhaling

1. Bereken $log_2(\sqrt{a})$ met $a = \frac{4\sqrt[3]{2}\sqrt{8}}{\sqrt[6]{32}}$

10.2 het getal e

1. J of F: $e = \lim_{n\to 0}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

10.3 rekenregels

1. Welke waarde neemt de uitdrukking $\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$ aan als $x = ln\sqrt{3}$?

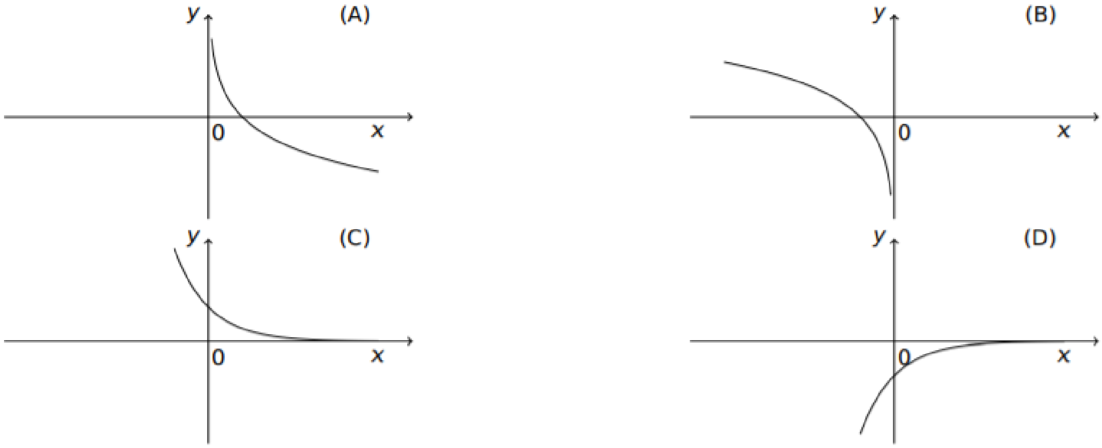
2. Als $f(x) = e^{4x-3}$, toon dan aan dat $f\left(1 - ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e \cdot x^4$
3. Vereenvoudig: $e^{2ln(3)} + ln(e^2)$
4. los op: $ln(4x - 10) - ln(x - 2) = ln(x - 1)$
5. los op: $ln(x - 3) - ln6 = 2ln2$
6. Bereken $ln(x^2y^2)$ met

$$\begin{cases} lnx + lny^2 & = & 4 \\ lnx^2 - 3lnxy & = & -5 \end{cases}$$

10.4 exp en log functies met grondtal e

1.

Welke van onderstaande figuren kan de grafiek voorstellen van de functie
$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \ln(-x)$?



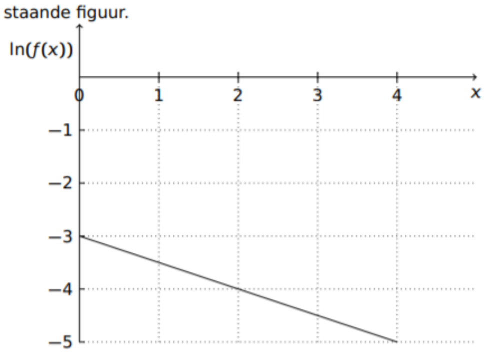
10.5 rekenregels afgeleide

1. bepaal de afgeleide van de volgende functies
   (a) $f(x) = \log\left(x^3 + 3^x\right)$
   (b) $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+7x}$
2. Welke antwoord geeft de afgeleide van $f(x) = \ln\left(\frac{(x+5)^4}{\sqrt{x^2+4}}\right)$
   (a) $\frac{4}{x+5} - \frac{x}{x^2+4}$
   (b) $2\left(\frac{1}{x+5} - \frac{2x}{x^2+4}\right)$
   (c) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{(x+5)^4}$
   (d) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+5} \cdot \frac{8\sqrt{x^2+4}}{x}$
3. De 2020ste afgeleide van $f(x) = x \cdot e^x$ is
   (a) $(x + 2020)e^x$
   (b) $xe^x + 2020$
   (c) $2020e^x$
   (d) xe^x
4. Bepaal $f'(0)$ met $f(x) = e^{e^x}$

5. Bepaal de waarde van k voor $f(x) = e^{kx} + x$ als
$$[Df(x)]^2 + D[f(x)^2] + f(x)^2 = (x+1)^2$$

6. Los op

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De grafiek die het verband weergeeft tussen x en $\ln(f(x))$ is gegeven in onderstaande figuur.



Bepaal de afgeleide $f'(2)$.

(A) $f'(2) = \frac{-1}{2e}$ (B) $f'(2) = \frac{-1}{2e^2}$ (C) $f'(2) = \frac{-1}{2e^3}$ (D) $f'(2) = \frac{-1}{2e^4}$

10.6 regel van L'Hospital

1. Bereken:
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-e^4}{x-2}$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x}$
   (c) $\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$
   (d) $\lim_{x\to -\infty} x^{-3}e^x$
   (e) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
   (f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}$
   (g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{lnx}$
   (h) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{lnx}}$
   (i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{10^{10}}}{e^x}$
   (j) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

10.7 verloop

1. Stellen $f(x) = ln(x^2)$ en $f(x) = 2ln(x)$ dezelfde functies voor? Los vervolgens $ln(x^2) \leq e$ op.
2. Bespreek en teken de grafiek van $f(x) = e^{-x^2}$
3. Bespreek en teken de grafiek van $f(x) = ln(4-x^2)$
4. Bespreek en teken de gafiek van $f(x) = x^x$
5. Gegeven de functie f met als voorschrift $f(x) = ln(1-\sqrt{x})$
   (a) Bepaal het domein
   (b) Toon aan dat deze functie 1 op 1 is (bijectief)

(c) Bepaal de inverse functie

6. Gegeven $f(x) = 3xe^{2x-10}$

   (a) Geef de lineaire benadering bij $x = 5$

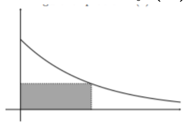
   (b) Bepaal de intervallen waar $f(x)$ stijgend is

7. Gegeven de functie f met als voorschrift $f(x) = x \cdot e^{-mx^2}$ met m een parameter. Bepaal de waarde(n) van m zodat de grafiek van f een bp heeft in $x = \frac{1}{2}$

8. Gegeven de functie f met als voorschrift $f(x) = \frac{e^{mx}}{1-e^x}$ met m een parameter. Bepaal de waarde(n) van m zodat voor $x = ln2$ de grafiek van f een max heeft

10.8 toepassingen

1. Bepaal de opp van de grootst mogelijke rechthoek die op volgende manier geconstrueerd wordt met $f(x) = e^{-x}$



2. Bepaal de waarde van a zodat volgende functie continu is:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(x + e^{x+2}\right) & x > 0 \\ acosh(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

3. Bepaal de waarde van a en b zodat volgende functie continu is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+3x)}{2x} & x > 0 \\ ax + b & x \leq 0 \end{cases}$$

4. Bepaal de waarde van de parameters a en b zodat $y = 5x + 9$ de raaklijn in $x = 0$ aan de grafiek van $f(x) = 3e^{ax} + b$

5. Gegeven de functie f:R→ $R : x \mapsto$f(x)=e$^x - x$. Bepaal het raakpunt van de raaklijn die door de oorsprong gaat.

6. Bepaal het snijpunt met de x-as van de raaklijn in $P(e, f(e)$ met $f(x) = \frac{lnx}{x^2}$

10.9 groeimodellen

1. Beschouw een groeimodel met beperkte groei (of afname)

   (a) Geef de differentiaalvergelijking en de oplossing van dit groeimodel

   (b) Iemand neemt een thermometer mee van binnen naar buiten. Buiten is het −15C koud. Na één minuut wijst de thermometer 16C aan, na 5 minuten −1C. Bereken de binnentemperatuur

2. Het aantal fruitvliegjes in een kweekomgeving kan gemodelleerd worden volgens een logistisch groeimodel. Initieel zijn er 4 fruitvliegjes en na 5 dagen is hun aantal al toegenomen tot 23, terwijl er maximaal 230 vliegjes kunnen overleven in de kweekomgeving.

   (a) Geef de passende differentiaalvergelijking

   (b) Hoe lang duurt het vooraleer er 180 vliegjes zijn?

   (c) Bepaal het tijdstip waarop de groeisnelheid het grootst is.

   (d) Geef een schets waarop je de belangrijkste kenmerken van dit groeimodel aanduidt

3. In een vijver worden 20 vissen uitgezet. De groei van de vispopulatie wordt gegeven door $P'(t) = 0.0005P \bullet (800 - P)$. Bepaal het tijdstip waarop er 300 vissen zullen zijn.

4. Een kip wordt vanuit de koelkast ($6C$) wordt in een voorverwarmde oven ($200C$) gezet. Na 20 minuten is de temperatuur van de kip al ($160C$). Geeft het functievoorschrift die het temperatuurverloop van de kip in de oven beschrijft.

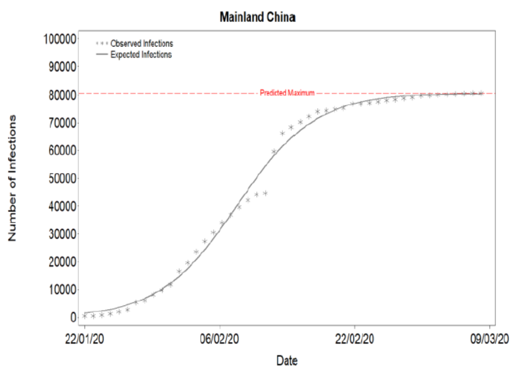
5. De temperatuur van een fles melk daalt met een snelheid van 0,0837 keer het verschil tussen de melktemperatuur en de kamertemperatuur die 20 bedraagt.
   (a) Formuleer het bovenstaande verband m.b.v. een DV
   (b) Onderstel dat de melk aanvankelijk 80 warm is. Na hoeveel tijd is de melktemperatuur tot 50 gezakt? (A $\pm 8m17s$)

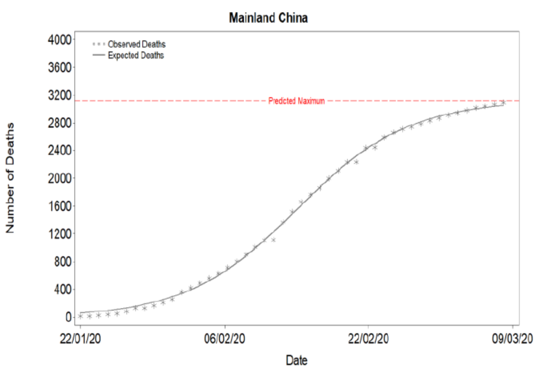
6. In het TV-programma het lichaam van Coppens voeren Staf en Mathias allerlei experimenten uit. Eén van deze experimenten speelde zich in een diepvriescel bij een temperatuur van $-30C$. Staf neemt per ongeluk zijn GSM mee naar binnen. Bij het buitengaan wil hij zijn berichten controleren. Dit lukt pas als de GSM terug opgewarmd is tot $0C$. Als de GSM na twee minuten al een temperatuur heeft van $-25C$, hoelang duurt het dan vooraleer Staf zijn berichten kan controleren, als je weet dat Staf zich nu in een ruimte met een omgevingstemperatuur van $20C$ bevindt.

7. In een gebied met een maximale bevolkingscapaciteit van 100000 mensen leven initieel 100 individuen. Na een jaar is dit aantal gestegen tot 120. Wanneer is de groeisnelheid het grootst, op basis van een logistisch groeimodel? (A:37j10m3d)

8. Het grote probleem vandaag de dag bij de productie van groene energie (bijv. wind- en zonne-energie is de opslag hiervan. Gelukkig dalen de prijzen van lithiumbatterijen evenredig met de actuele prijs. Op 1 januari 2010 kostte de opslag nog 1000 Euro/kWh, op 1 januari 2016 nog 273 Euro/kWh. Hoeveel maanden zal het nog duren om een aanvaardbare kostprijs voor de particulier van 100 Euro/kWh te halen? (bron http://blog.zonnepanelen.nl/2016/03/ontwikkeling-van-zonnepanelen, geraadpleegd op 6/12/2017)

9. Bepaal een passend functievoorschrift dat hoort bij onderstaande logistisch groeimodel van de corona-uitbraak in China begin 2020





11 taken

1. verloop

2. L'Hospital