

# Hoofdstuk V: exponentiële en logaritmische functies

www.karelappeltans.be

August 11, 2021

## 1 lineaire versus exponentiële groei

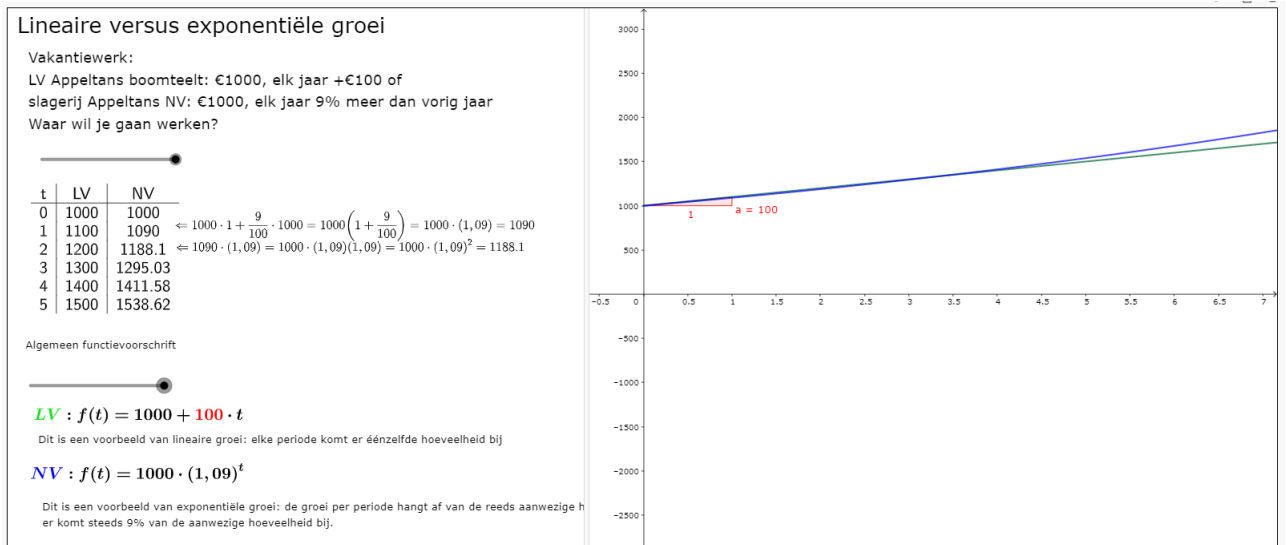


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/m3zxeue6>

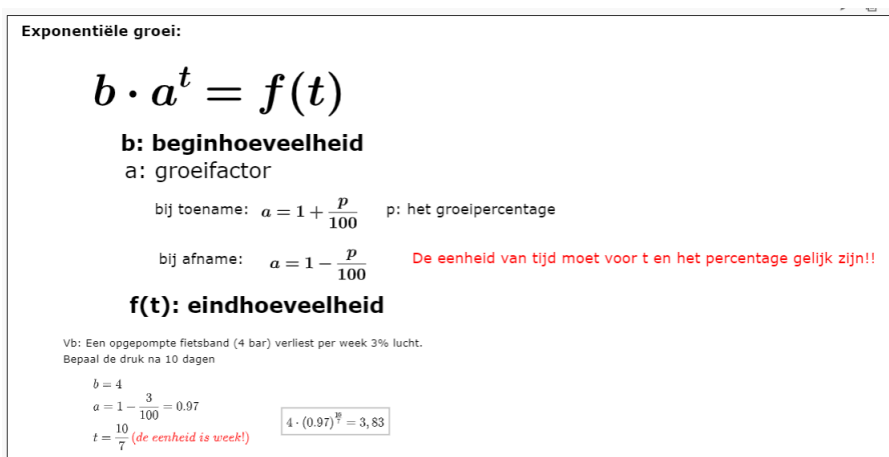


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/m3zxeue6>

## 2 grafiek exponentiële functies

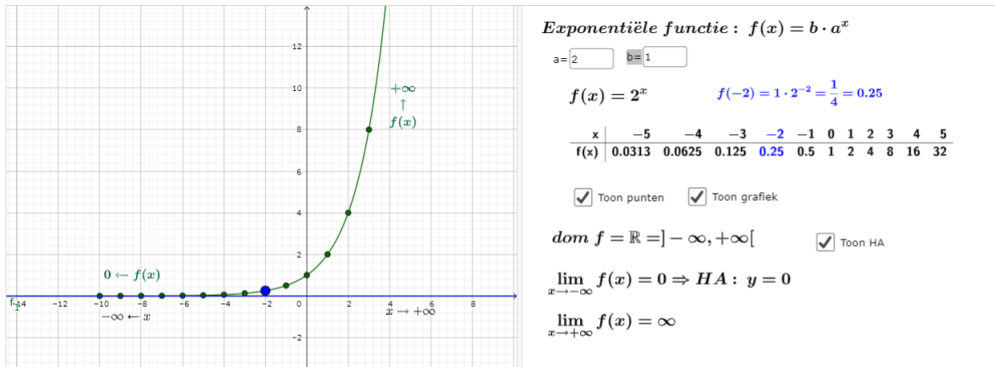


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/Rb6qHp3z>

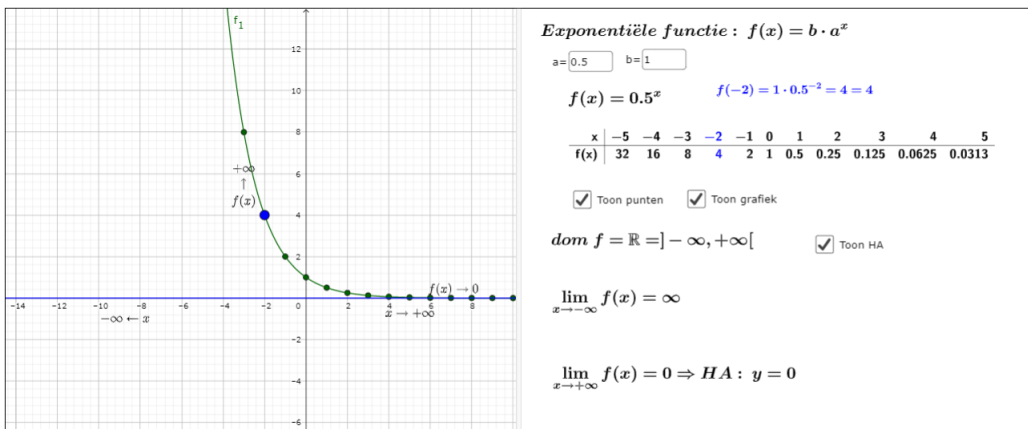


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/Rb6qHp3z>

## 3 logaritmen

Definitie

3 : exponent  
 $2^3 = 8$   
 2 : grondtal      8 : uitkomst

Gegeven : grondtal en uitkomst  
 Gevraagd : exponent

Voorbeeld :  
 grondtal : 4       $4^y = 64$  nieuwe notatie  $y = \log_4 64 \Rightarrow \log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$   
 uitkomst : 64  
 gevraagd : exponent

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \quad a > 0, a \neq 1, x > 0$

$\log_2 8 = 3$  want  $2^3 = 8$

$\log_4 1 = 0$  want  $4^0 = 1$

$\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$  want  $(\sqrt{2})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$

$\log_3(-9) = /$  want  $3^x > 0$

Speciale notaties:  
 $\log_{10} 100 \xrightarrow[\text{wordt niet getoeterd}]{\text{grondtal 10}}$   $\log 100 = 2$  want  $10^2 = 100$   
 $\log_e \sqrt{e} \xrightarrow[\text{notatie}]{\text{nieuwe}}$   $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$  want  $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF>



## 5 verband grafieken exponentiële functies en logaritmische functies met hetzelfde grondtal

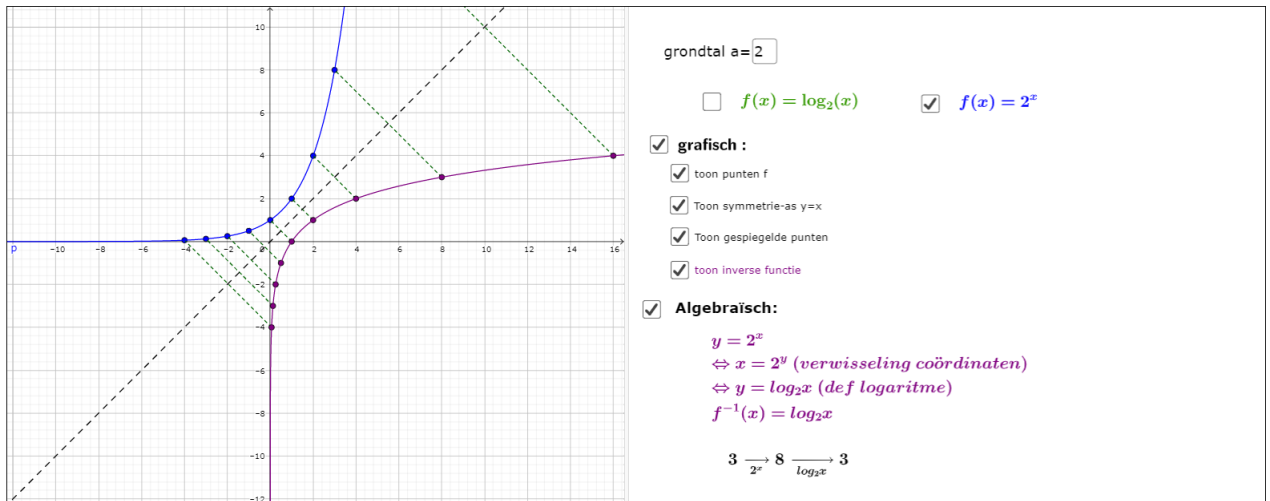


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/YYevVAPy>

## 6 Toepassingen op logaritmen

### 6.1 geluid

$$\Delta L = 10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

### 6.2 aardbevingen

$$\Delta M = \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

### 6.3 Logaritmisch papier

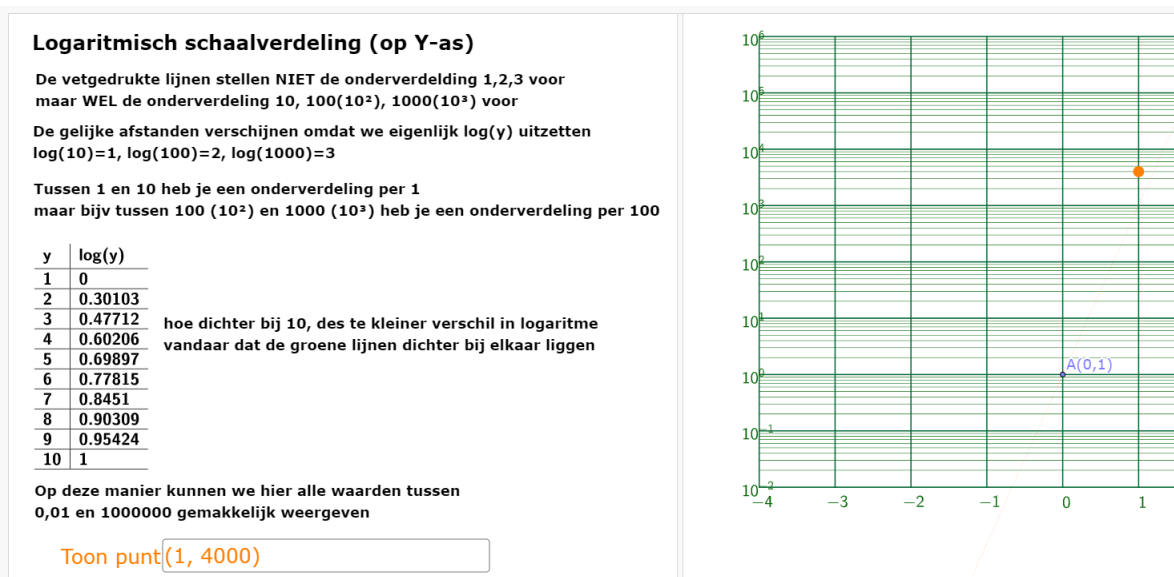


Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/gzggfr7h>

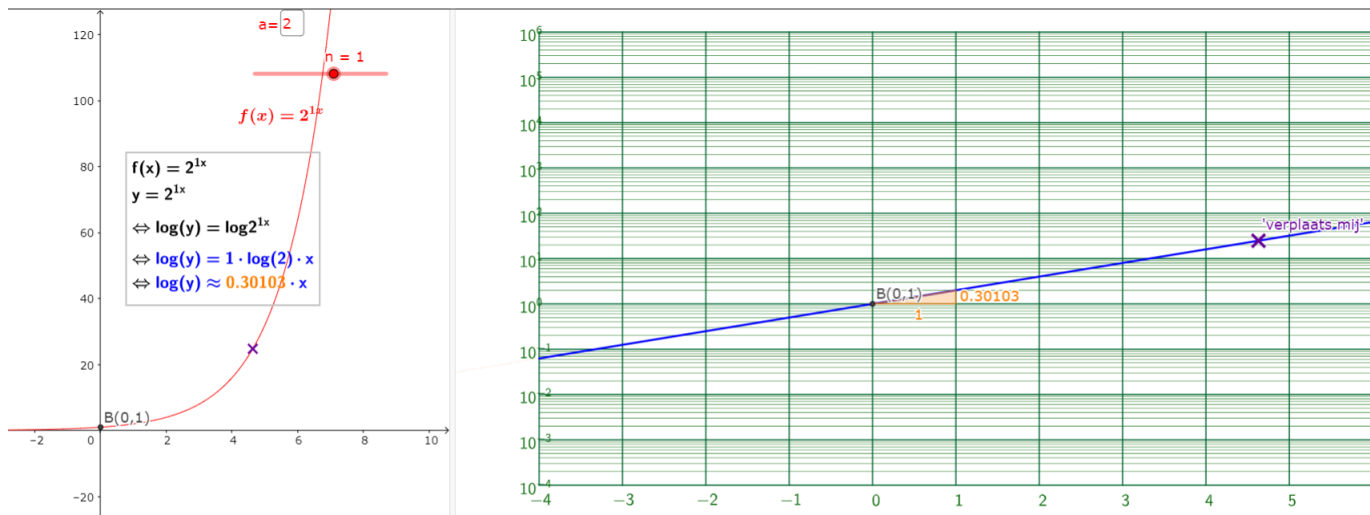


Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/gzggfr7h>

## 7 exponentiële vergelijkingen

### 7.1 tweeterm

#### 7.1.1 zelfde grondtal

*Voorbeeld 1 :*

$$27^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-4}$$

$$\Leftrightarrow (3^3)^x = (3^{-1})^{5x-4}$$

$$\Leftrightarrow 3^{3x} = 3^{-5x+4}$$

$$\Leftrightarrow 3x = -5x + 4$$

$$\Leftrightarrow 8x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf>

#### 7.1.2 verschillend grondtal

*Voorbeeld 1 :*  $3^{4x+5} = 5^{x-1}$

$$\Leftrightarrow \log 3^{4x+5} = \log 5^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (4x + 5) \log 3 = (x - 1) \log 5$$

$$\Leftrightarrow (4 \log 3)x + 5 \log 3 = (\log 5)x - \log 5$$

$$\Leftrightarrow (4 \log 3 - \log 5)x = -\log 5 - 5 \log 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\log 5 - 5 \log 3}{4 \log 3 - \log 5}$$

Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf>

## 7.2 drieterm

**Los op:**

$$3^{2x-3} - 10 \cdot 3^{x-2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^{-3} - 10 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27} \cdot (3^x)^2 - \frac{10}{9} \cdot 3^x + 3 = 0$$

Stel  $t = 3^x$  en  $\times 27$  geeft

$$\Leftrightarrow t^2 - 30t + 81 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} s = 30 \\ p = 81 \end{array} \right\} t_1 = 3 \text{ en } t = 27$$

$$3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \quad 3^x = 27 = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$$

Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf>

## 8 logaritmische vergelijkingen

**Voorbeeld 1:**  $2 \log_4 x = 5$

$$\Leftrightarrow \log_4 x = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4^{\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32$$

**Voorbeeld 3:**  $\log_3(2x) - \log_3(x-3) = 1$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{2x}{x-3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x-3} = 3^1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x = 9$$

**Voorbeeld 2:**  $20 \cdot \ln(0,2x) = 30$

$$\Leftrightarrow \ln(0,2x) = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0,2x = e^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{0,2}$$

Bij logaritmische vergelijkingen, moet je nog altijd controleren of de oplossing wel kan. Je kan immers een logaritme alleen nemen van een positief getal.

Figure 15: <https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf>

## 9 Exponentiële en logaritmische ongelijkheden

**Logaritmische ongelijkheden**

**$\log_3(x-2) \leq -1$**  BV:  $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-2) \leq \log_3 3^{-1}$$

$\log_3$  is een stijgende functie, dus de orde blijft bewaard

$$\Leftrightarrow x-2 \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{7}{3}$$

**oplossing:  $x \in [2, \frac{7}{3}]$**



Figure 16: <https://www.geogebra.org/m/hwv5ynd>

## 10 oefeningen

### 10.1 exponentiële groei

1. Stel dat je vanaf je twaalfde verjaardag volgende afspraak met je ouders gemaakt hebt over het krijgen van zakgeld: de eerste week 1 eurocent, de tweede week 2 eurocent en elke volgende week het dubbele van de week ervoor. Hoeveel zakgeld zou je dan deze week ontvangen?
2. Hoeveel brengt 1000 euro vakantiegeld op als ik dit geld 7 jaar laat staan op onderstaande rekeningen?

Laatste verificatie: vrijdag 28 augustus 2020

Aanbieder	Product	Basisrente	Getrouwheidspremie	Totaal	
	<b>Aion Extended</b> Geen minimum inleg	0,10%	0,90%	1,00%	<a href="#">Nu aanvragen</a>
	<b>bpost bank Cocoon Spaarrekening</b> Geen minimum inleg	0,40%	0,15%	0,55%	

3. Het coronavirus:



### Aantal besmettingen stijgt "exponentieel" in Frankrijk

Het aantal coronabesmettingen dat dagelijks in Frankrijk wordt vastgesteld, stijgt "exponentieel". Daarvoor waarschuwen de Franse gezondheidsautoriteiten. Vandaag werden er meer dan 7.379 nieuwe besmettingen gemeld. Gisteren ging het nog om 6.111 besmettingen.

- (a) Bepaal de groeifactor en het groeipercentage van het coronavirus in Frankrijk
- (b) Als dit groeipercentage elke dag hetzelfde blijft, hoeveel besmettingen zijn er dan vandaag?

4. Het coronavirus:



### De dagelijkse coronacijfers

Het gemiddeld aantal nieuwe coronabesmettingen in ons land blijft afnemen. In de week van 20 tot 26 augustus werden **dagelijks 437 besmettingen** vastgesteld, dat zijn er vijftien procent minder dan in de week ervoor.

- (a) Als dit groeipercentage elke week hetzelfde blijft, hoeveel besmettingen zijn er dan
    - i. 3 weken later
    - ii. 10 dagen later
  - (b) Bepaal het groeipercentage en de groeifactor per dag
5. gelijkwaardige rentevoeten.
    - (a) Bij welke (fictieve) bank wil jij jouw spaargeld zetten: Bank A geeft 12% per jaar en Bank B geeft 6% per half jaar.
    - (b) Bepaal de gelijkwaardige rentevoet voor bank B

6. Op Black Friday geeft winkel A 21% korting en in winkel B hoef je de BTW van 21% niet te betalen voor hetzelfde artikel. Welke winkel verkies je?
7. Afschrijving auto bij omnium-verzekering

### Afschrijving bepaalt de waarde van je auto

Als je een [omniumverzekering](#) hebt, dan daalt je auto in waarde door de afschrijving (of waardevermindering) die wordt toegepast. Als je [auto total loss](#) is of je [auto gestolen](#) is, zal dat dus een invloed hebben op het bedrag van je schadevergoeding. Door de afschrijving krijg je meer geld voor een auto die maar 1 jaar oud is dan voor een die 5 jaar oud is.

### Let op de afschrijving als je omniumverzekeringen vergelijkt

- **Gedurende welke periode wordt er geen afschrijving toegepast?**  
Hoe langer die periode, hoe beter. Soms zie je het aantal maanden vermeld staan in de naam van de autoverzekering, bijvoorbeeld 12 of 24M. Dat betekent dat je auto gedurende die tijd zijn volledige waarde behoudt.
- **Welk afschrijvingspercentage wordt toegepast?**  
Hoe lager dit percentage, hoe trager je auto waarde verliest. Bij de meeste verzekeraars wordt je auto 1% minder waard per maand. Dat percentage wordt toegepast na de periode waarin je auto zijn volledige waarde behoudt.

Heb je een goedkope omniumverzekering gevonden? Dan betekent dat vaak dat je auto maar gedurende een korte periode 100% van zijn waarde behoudt.

### Afschrijving in de praktijk

Stel dat je een omniumverzekering formule 24M met een afschrijvingspercentage van 1% hebt genomen voor je auto van € 20 000. De eerste 2 jaar (24 maanden) word je dan volledig vergoed. Daarna wordt de aangenomen waarde berekend op basis van de ouderdom van de wagen:

- (a) Bepaal de waarde van deze auto na 30 maanden
- (b) Bepaal de waarde van deze auto na 5 jaar
8. In helder water vermindert de lichtintensiteit per meter met 60%. We nemen de lichtintensiteit aan de oppervlakte als eenheid.
- (a) Bereken de lichtintensiteit op 5 m diepte
- (b) Schrijf de lichtintensiteit als functie van de diepte
9. De bevolking van een land groeit exponentieel aan met 12% op 20 jaar
- (a) Wat is de groeifactor op 20 jaar, 10 jaar en op 1 jaar?
- (b) In 1990 is de bevolking 125000. Wat is de bevolking volgens dit model dit jaar?
- (c) Zoek het voorschrift van de functie die met de tijd (in jaren gerekend vanaf 1990) de bevolking laat overeenstemmen
- (d) Na hoeveel jaren zal de bevolking verdubbelt zijn?
10. In ideale laboratoriumomstandigheden verdubbelt de bacterie E. Colli zich elke 5 uur. Bij het begin van het kweekprogramma zijn er 160
- (a) Bepaal groeifactor en groeipercentage per uur
- (b) Bepaal het aantal na 11 uur
- (c) Bepaal he aantal na 2 dagen
- (d) Wanneer zal het aantal vertienvoudigd zijn?
11. Lees eerst onderstaand artikel (vrt.nu, gelezen op 28 oktober 2020)



In heel België liggen nu 5.554 patiënten met een coronabesmetting in het ziekenhuis, van wie 911 patiënten op de afdeling intensieve verzorging. "De ziekenhuiscijfers verdubbelen nu om de 8 dagen", zei viroloog Steven Van Gucht vanmorgen. "Als de cijfers aan dit tempo blijven toenemen, dan kunnen we tegen 6 november de kaap van de 2.000 patiënten op intensieve zorg bereiken. Dat is de maximumcapaciteit die we momenteel hebben." Dat zou dus betekenen dat tegen volgende week vrijdag alle bedden op intensieve zorg vol liggen.

We kijken alleen naar de cijfers van de intensieve zorg

- (a) Bepaal de groeifactor en groeipercentage per dag
- (b) Reken de voorspellingen na

12. Lees eerst onderstaand artikel (vrt.nu, gelezen november 2020)

Het is evenzeer wensdenken dat de cijfers tot het einde van het jaar even snel bergaf blijven gaan”, zegt Van Ranst. “We telden begin deze week nog zo’n 10.000 besmettingen per dag. Als je rekent dat de curve wekelijks gestaag met 25 procent zal dalen, wat al best veel is, tellen we tegen Kerstmis nog steeds 1.334 nieuwe positieve testen per dag. Ter vergelijking: eind juni waren dat er minder dan 100. De curve zou al wekelijks met 50 procent moeten dalen om daar over zes weken weer in de buurt te komen. Dat wil zeggen dat de daling veel sneller zou gaan dan de stijging die aan de piek voorafging. Dat zou wel héél straf zijn.”

- (a) Bereken de groeifactor en het groeipercentage per dag
- (b) Als er op kerstdag 1334 positieve gevallen waren, wanneer waren er dan 10000 gevallen?

13. In 2014 bedroeg de wereldbevolking 7,14 miljard mensen. Volgend voorschrift modelleert het aantal mensen na 2014:  $P(t) = 7,14(1,011)^{t-2014}$

- (a) Geef het jaarlijks groeipercentage
- (b) In welk jaar zal de wereldbevolking 9 miljard bedragen?

14. Op het ogenblik  $t=0$  s bestaat een radio-actieve bron uit  $64 \mu\text{g } ^{234}\text{Th}$ . De halveringstijd van dit isotoop is 24 dagen. Na 120 dagen bevat de bron een hoeveelheid  $^{234}\text{Th}$  gelijk aan?

## 10.2 logaritmen

1. Bereken zonder ZRM

- (a)  $\log_2 32$
- (b)  $\log 0,01$
- (c)  $\log_3 3^{-2}$

- (d)  $\log_5 1$
- (e)  $\log_4 - 4$
- (f)  $\log_7 7$
- (g)  $\log_3 729$
- (h)  $\log_{-2} 8$
- (i)  $3^{\log_3 17}$

2. Bereken zonder GZRM

- (a)  $\log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{\sqrt[5]{27 \cdot 9}}{3^{-5}} \right)$
- (b)  $\log_4 \left( \frac{2^{-3} \sqrt[5]{64}}{\sqrt[3]{128}} \right)$
- (c) Voor hoeveel gehele waarden van  $x$  geldt  $|\log_2(2x + 1) - 2| \leq 2$

3. Bereken  $\log \left( \sqrt[3]{\frac{ab^2}{cd^4}} \right)$  als  $\log a = 2$ ,  $\log b = 3$ ,  $\log c = 4$  en  $\log d = 5$

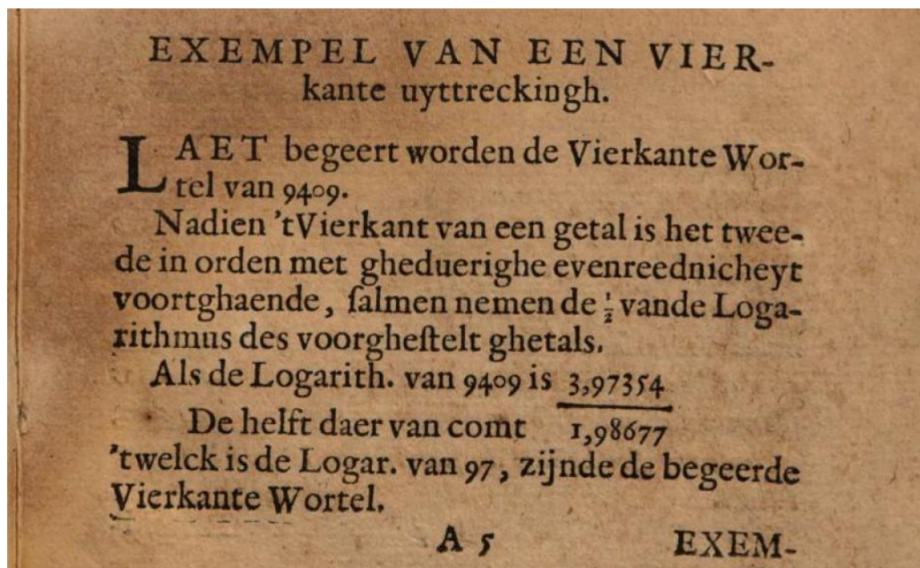
4. als  $\log 2 \approx 0.3$  en  $\log 3 \approx 0.48$  bereken dan

- (a)  $\log 6$
- (b)  $\log 30$
- (c)  $\log 1,5$
- (d)  $\log 0,75$

5. Bewijs de volgende logaritmische identiteiten:

- (a)  $\log_a \left( \frac{1}{x} \right) = -\log_a(x)$
- (b)  $\frac{1}{\log_x a} - \frac{1}{\log_y a} = \log_a \left( \frac{x}{y} \right)$
- (c)  $\log_{xy} a = \frac{\log_x a \cdot \log_y a}{\log_x a + \log_y a}$
- (d)  $\frac{1}{\log_{\frac{1}{a}} pq} + \log_{pq} 10a = \frac{1}{\log p + \log q}$
- (e)  $\log_a x = (1 + \log_a y) \cdot \log_{ay} x$

6. Uit een handboek wiskunde van 1642: Schrijf deze wiskunde bewerking op in onze hedendaagse notaties



### 10.3 toepassingen op logaritmen

1. Bereken de verhouding in intensiteit tussen de zwaarste en lichtste aardbeving geregistreerd op 8/11/20

The biggest earthquakes:

today: 5.3 in Lata, Temotu, Solomon Islands

this week: 6.1 in Hihifo, Niuaus, Tonga

this month: 7.6 in Sand Point, Alaska, United States

this year: 7.8 in Sand Point, Alaska, United States

2. Jeugdhuizen vallen onder de milieuwetgeving wanneer zij muziek willen afspelen. Bereken de verhouding in intensiteit tussen categorie 3 en categorie 1

Afhankelijk van hoeveel geluid je wil produceren, kies je voor een bepaalde categorie binnen de VLAREM.

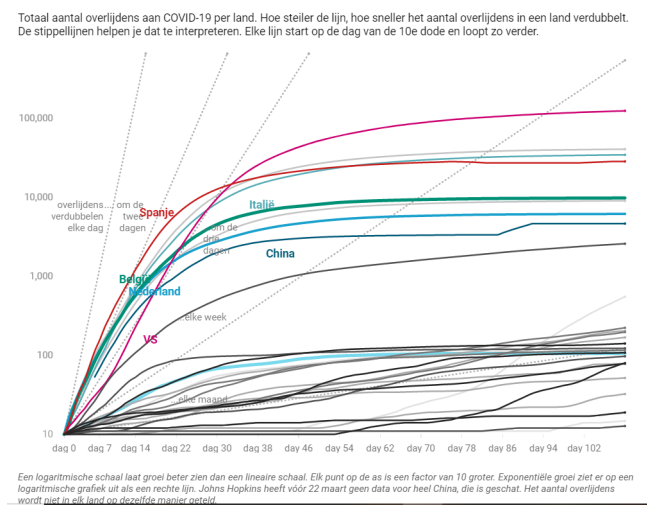
- > een geluidsniveau van maximum 85 dB(A)LAeq,15min. = CAT. 1
- > een geluidsniveau van maximum 95 dB(A)LAeq,15min. = CAT. 2 = VLAREM KLASSE III
- > een geluidsniveau van maximum 100 dB(A)LAeq,60min. = CAT. 3 = VLAREM KLASSE II

3. Om de ouderdom van gesteenten te dateren wordt de verhouding tussen de isotopen Argon-40 (A) en Potassium-40 (P) gemeten. Volgende formule geldt dan:

$$t = 1,26 \times 10^9 \log_2 \left( 1 + 8,33 \left( \frac{A}{P} \right) \right)$$

Als in een monster gesteente deze verhouding 0,212 bedraagt, bepaal dan de ouderdom.

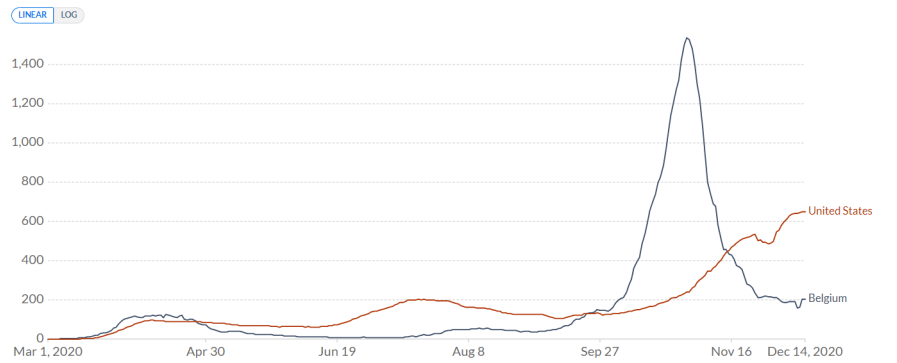
4. Geef het voorschrift van de gegeven rechten op onderstaande logaritmische schaal



5. Vergelijk onderstaande grafieken

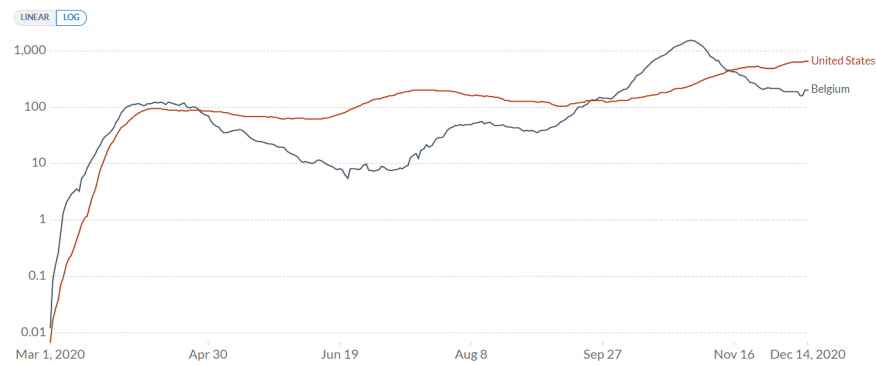
### Daily new confirmed COVID-19 cases per million people

Shown is the rolling 7-day average. The number of confirmed cases is lower than the number of actual cases; the main reason for that is limited testing.



### Daily new confirmed COVID-19 cases per million people

Shown is the rolling 7-day average. The number of confirmed cases is lower than the number of actual cases; the main reason for that is limited testing.



## 10.4 grafieken exponentiële en logaritmische functies

1. Bepaal of  $f^{-1}(x)$  stijgend of dalend is als  $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1} + 4$

## 10.5 exponentiële vergelijkingen

Los de volgende vergelijkingen op:

1.  $6^x = 1$
2.  $9^{2x} = 5$
3.  $3^{2x} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$
4.  $2^{x+3} = 16^{x-3}$
5.  $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$
6.  $3 \cdot 9^x - 26 \cdot 3^x = 3$
7.  $6^x + 216 \cdot 6^{-x} = 42$

## 10.6 logaritmische vergelijkingen

1.  $\log(2x + 3) + \log(x - 1) = \log(x^2 + 9)$
2.  $2 \cdot \log(x) + 1 = \log(19x + 2)$
3.  $\log_2 x = \log_4(6 - x)$
4.  $\log_5(5^x - 7) - \log_{25} 324 = 2 - x$
5.  $\log_x(2x + 8) = 2$
6.  $\log_3(x + 1) + \log_3(2x - 1) = \log_9[3(x - 1)]^4$
7.  $2 \cdot \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9$

## 10.7 Exponentiële en logaritmische ongelijkheden

Los op:

1.  $10 + 7 \cdot \log_3(x + 1) \leq 45$

2.  $1 + 4 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x + 5) \geq -3$

## 10.8 taken

1. zoek een eigentijds voorbeeld van exponentiële groei en verzin er zelf een oef bij (geen voorbeeld van een 'wiskunde'site)
2. exponentiële vergelijkingen en logaritmische vergelijkingen