Teoría – Tema 9

Teoría - 6 - ecuación general del plano - parte 1 de 2

Ecuación general o implícita del plano. Vector normal al plano

Vamos a eliminar parámetros de la ecuación paramétrica del plano.

$$\begin{Bmatrix} x=x_0+\alpha\cdot u_x+\beta\cdot v_x \\ y=y_0+\alpha\cdot u_y+\beta\cdot v_y \\ z=z_0+\alpha\cdot u_z+\beta\cdot v_z \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Consideramos } \alpha \text{ y } \beta \text{ incógnitas} \rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha\cdot u_x+\beta\cdot v_x=x-x_0 \\ \alpha\cdot u_y+\beta\cdot v_y=y-y_0 \\ \alpha\cdot u_z+\beta\cdot v_z=z-z_0 \end{Bmatrix}$$

Expresamos el sistema en su notación matricial, con la matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_x & v_x & x-x_0 \\ u_y & v_y & y-y_0 \\ u_z & v_z & z-z_0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Matriz ampliada } 3x3$$

¿Qué tenemos en la matriz ampliada? Tenemos dos vectores columnas, que forman tres ecuaciones con dos incógnitas (recordamos que las incógnitas son los valore α y β). Y al añadir la columna de términos independientes, pasamos a una matriz ampliada de tres filas y tres columnas.

Si los dos vectores del plano son linealmente independientes, el rango de la matriz y de la matriz ampliada $3x3$ debe ser 2. Recuerda que el rango es el número de vectores linealmente independientes contenidos en la matriz.

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_x & v_x & x-x_0 \\ u_y & v_y & y-y_0 \\ u_z & v_z & z-z_0 \end{array}\right) \rightarrow \quad Rango(A)=2=Rango(A/C)$$

Y si el rango es 2, el determinante $3x3$ de la matriz ampliada debe ser nulo, ¿verdad?

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x & x-x_0 \\ u_y & v_y & y-y_0 \\ u_z & v_z & z-z_0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Al desarrollar por Sarrus} \rightarrow \quad Ax+By+Cz+D=0$$

Ecuación general o implícita del plano

$Ax+By+Cz+D=0$ → Una única ecuación donde aparecen 1, 2 o 3 incógnitas

Dado el plano de ecuación general $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$, llamamos vector director, normal o característico del plano al vector $\vec{u_\Pi}=(A,B,C)$.

Este vector $\vec{u_\Pi}=(A,B,C)$ **es perpendicular al plano**. Es decir:

$\vec{u_\Pi}=(A,B,C)\perp\Pi$

Este resultado es la cañaaaaa!!!! Nos permite resolver un montón de problemas de manera "supersencilla", simplemente recordando que si tenemos la ecuación general del plano tenemos un vector perpendicular al mismo.

Sea el punto $P(x_1,y_1,z_1)$ y la recta $r:\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$.

Un plano perpendicular a la recta tendrá como vector normal $r\|\vec{u_\Pi}=(u_x,u_y,u_z)\perp\Pi$ y podemos escribir directamente la ecuación de este plano perpendicular de la forma general:

$\Pi: u_x x+u_y y+u_z z+D=0$

El término D se obtiene sustituyendo las coordenadas del punto $P(x_1,y_1,z_1)$ en la ecuación del plano.

$D=-(u_x x_1+u_y y_1+u_z z_1)$

Ejemplo 1 resuelto

Hallar las ecuación general del plano que pasa por el punto $P(2,3,1)$ **y es paralelo a los vectores** $\vec{u}=(-1,2,4)$ **y** $\vec{v}=(1,2,1)$ **.**

Los vectores son linealmente independientes, ya que al comparar componentes:

$$\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{2}\neq\frac{4}{1}$$

Llegamos a la ecuación paramétrica siguiente:

$$\begin{Bmatrix} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Matriz ampliada} \rightarrow \quad A/C=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x-2 \\ 2 & 2 & y-3 \\ 4 & 1 & z-1 \end{array}\right)$$

El determinante de la matriz asociada debe ser nulo, ya que el rango de A/C no puede ser 3 ya que solo tenemos dos vectores linealmente independientes. Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 2 & 2 & y-3 \\ 4 & 1 & z-1 \end{vmatrix}=0$$

Podemos aplicar Sarrus directamente, o bien aplicar propiedades de determinantes para obtener unos productos finales más sencillos.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 2 & 2 & y-3 \\ 4 & 1 & z-1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow F'_2=F_2+2F_1 \quad , \quad F'_3=F_3+4F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 0 & 4 & y-3+2(x-2) \\ 0 & 5 & z-1+4(x-2) \end{vmatrix}=0 \rightarrow$$

$$F'_3=4F_3-5F_2 \rightarrow \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 0 & 4 & y-3+2(x-2) \\ 0 & 0 & 4[z-1+4(x-2)]-5[y-3+2(x-2)] \end{vmatrix}=0$$

Ya tenemos un determinante de una matriz diagonal, por lo que el determinante final es el producto de los términos de la diagonal principal.

$$\frac{1}{4}\cdot 4\cdot[4(z-1+4(x-2))-5(y-3+2(x-2))]=0$$

$$4(z+4x-9)-5(y+2x-7)=0$$

$$4z+16x-36-5y-10x+35=0$$

$$6x-5y+4z-1=0$$

Recuerda nuestro lema espiritual: siempre podemos obtener la ecuación paramétrica del plano a partir de un punto y de dos vectores linealmente independientes... y de ahí podemos llegar a la ecuación general haciendo nulo el determinante de la matriz ampliada asociada.

Ejemplo 2 resuelto

Determina la ecuación paramétrica del plano Π **de ecuación implícita** $x-2y+2z-3=0$ **.**

¿Qué necesito para a ecuación paramétrica? **Un punto y dos vectores linealmente independientes**. Pues... obtengamos estos tres datos de la ecuación implícita.

¿Cómo saco el valor de un punto? Eso ya lo sabemos: dando valores a x e y , para obtener z .

Si $x=0, y=0 \rightarrow 2z-3=0 \rightarrow z=\frac{3}{2}$ → Punto $A(0,0,\frac{3}{2})$

¿Cómo obtenemos los dos vectores? Si sacamos otros dos puntos B , C podremos trazar los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y tras comprobar si son linealmente independientes, obtener la ecuación paramétrica. ¡¡Vamos a ello!!

Si $x=0, y=1 \rightarrow -2+2z-3=0 \rightarrow z=\frac{5}{2}$ → Punto $B(0,1,\frac{5}{2})$

Si $x=1, y=0 \rightarrow 1+2z-3=0 \rightarrow z=1$ → Punto $C(1,0,1)$

Trazamos los vectores:

$$\vec{AB}=(0,1,1)$$

$$\vec{AC}=(1,0,\frac{-1}{2})$$

Visualmente ya intuimos que son linealmente independientes, nada más ver sus componentes. Se cumple:

$$\frac{0}{1}\neq\frac{1}{0}\neq\frac{1}{-1/2}$$

Una vez realizada esta comprobación, podemos tomar ambos vectores $\vec{AB}=(0,1,1)$ y $\vec{AC}=(1,0,\frac{-1}{2})$ y , por ejemplo, el punto $A(0,0,\frac{3}{2})$ para escribir la paramétrica.

$$\begin{cases} x=\beta \\ y=\alpha \\ z=\frac{3}{2}+\alpha-\frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Ya lo tenemos. Y como somos muy frikis, vamos a profundizar realizando el paso inversa: pasar de esta ecuación paramétrica recién obtenida a la ecuación general... y verificar que obtenemos la ecuación que nos daba inicialmente el problema.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & \frac{-1}{2} & z-\frac{3}{2} \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Aplicar Sarrus} \rightarrow 0+y-\frac{x}{2}-(0+0+z-\frac{3}{2})=0 \rightarrow y-\frac{x}{2}-z+\frac{3}{2}=0 \rightarrow$$

$$\frac{-x}{2}+y-z+\frac{3}{2}=0 \rightarrow \text{Multiplicamos por } (-2) \rightarrow x-2y+2z-3=0$$

Y llegamos a la misma ecuación implícita del inicio.

Ejemplo 3 resuelto

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-1,2)$ y es perpendicular al plano $\Pi=2x+3y+z+5=0$.

Si la recta r es perpendicular al plano → $r\perp\Pi \rightarrow r\|\vec{u_\Pi} \rightarrow \vec{u_r}=(2,3,1)$.

Y con un punto y un vector ya podemos escribir la ecuación de la recta solución.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$$

Ejemplo 4 resuelto

Hallar el plano perpendicular a la recta $r:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{4}$ que pasa por el punto $A(1,-1,2)$.

El vector director de la recta será el vector normal del plano que estamos buscando:

$$\vec{u_\Pi}=(3,-3,4)$$

Por lo tanto:

$$\Pi:3x-3y+4z+D=0$$

Si el punto pertenece al plano → $A(1,-1,2)\in\Pi \rightarrow 3\cdot1-3\cdot(-1)+4\cdot2+D=0 \rightarrow D=-14$

Quedando el plano: $\Pi:3x-3y+4z-14=0$