VEKTORI

AUTOR: Nikolina Božić

Vektor je usmjerena dužina u kojoj razlikujemo početnu točku (hvatište) i završnu točku (kraj).

3 komponente: duljina, smjer i orijentacija

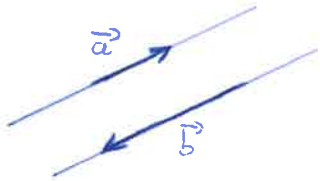
Dva su vektora jednaka ako se podudaraju u sve tri komponent

Dva su vektora suprotna ako imaju istu duljinu i smjer, a suprotnu orijentaciju.

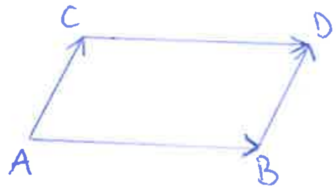
$$\vec{AB} = -\vec{AB}$$

Vektor $\vec{OT}$ - radijus vektor točke T.

Ako dva vektora leže na paralelnim pravcima, za njih kažemo da imaju isti smjer ili da su kolinearni.



Vektori $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ jednaki su onda i samo onda ako je četverokut ABDC paralelogram.

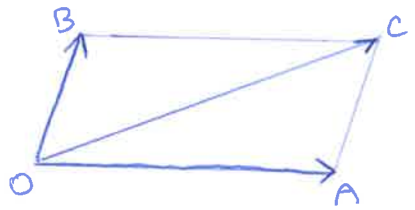


ZBRAJANJE VEKTORA

Zbroj dvaju vektora - pravilo paralelograma

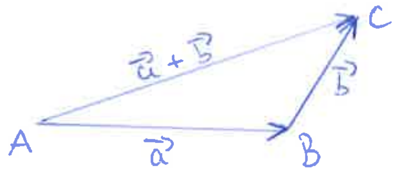
Zbroj dvaju vektora $\vec{OA}$ i $\vec{OB}$ s istim početkom O je vektor $\vec{OC}$ takav da je $\vec{OC}$ dijagonala paralelograma $OACB$.

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$



Zbroj vektora - pravilo trokuta

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su ulančani ako se završetak prvog podudara s početkom drugog. Zbroj dvaju ulančanih vektora $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$ je vektor $\vec{AC}$ koji spaja početnu točku prvog vektora sa završnom točkom drugog vektora.



Komutativnost zbrajanja vektora

Zbrajanje vektora je komutativno, tj. za bilo koja dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Asocijativnost zbrajanja vektora

Zbrajanje vektora je asocijativno, tj. za bilo koja tri vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Oduzimanje vektora

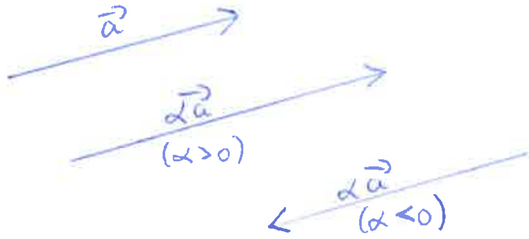
Razlika vektora definira se kao zbroj sa suprotnim vektorom:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

MNOŽENJE VEKTORA SKALAROM

Množenje vektora skalarom

Vektor $\vec{a}$ množi se skalarom α tako da se dobije vektor $\alpha\vec{a}$ sa svojstvima:



1. duljina mu je jednaka umnošku apsolutne vrijednosti skalara i duljine vektora:

$$|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$$

2. smjer mu je jednak smjeru vektora $\vec{a}$
3. orijentacija mu je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$ ako je $a < 0$.

Kriterij kolinearnosti

Vektori $\vec{a_1}$ i $\vec{a_2}$ $(\vec{a_2} \neq \vec{0})$ kolinearni su ako i samo ako postoji skalar k takav da vrijedi:

$$\vec{a_1} = \vec{ka_2}$$

LINEARNA NEZAVISNOST VEKTORA

Linearna nezavisnost

Dva su vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ linearno nezavisna ako iz jednakosti

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$$

nužno slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

U suprotnom slučaju su $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ linearno zavisni.

Za svaka dva linearno nezavisna vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ kažemo da čine bazu skupa vektora u ravnini V^2.

Dva su vektora kolinearna ako i samo ako su linearno zavisna.

Rastav vektora na komponente

Neka su $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ linearno nezavisni vektori: baza u V^2. Svaki se vektor $\vec{b} \in V^2$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 .$$

VEKTORI U KARTEZIJEVU KOORDINATNOM SUSTAVU

Prikaz vektora

Vektor $\overrightarrow{AB}$ s početkom u točki $A(x_1, y_1)$ i završetkom u točki $B(x_2, y_2)$ ima prikaz

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

Kriterij za jednakost vektora

Dva su vektora, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ jednaka ako i samo ako im se podudaraju njihove pravokutne koordinate:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x,\ a_y = b_y.$$

Duljina vektora

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

SKALARNI UMNOŽAK

Svojstva skalarnog umnoška

Za sve vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i svaki skalar $\lambda \in R$ vrijedi:

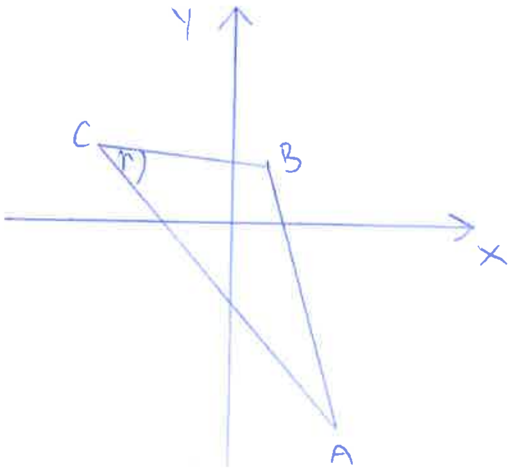
1) pozitivnost: $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

2) komutativnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

3) homogenost: $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

4) distributivnost: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

1. (DM) Na slici je prikazan trokut ABC.



a) Izračunajte mjeru kuta u vrhu C.

$A(3,-3)$

$B(2,1)$

$C(-3,2)$

$$tg\,\gamma = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$$

$$k_1 = \frac{Y_A-Y_C}{X_A-X_C} = \frac{-3-2}{3+3} = -\frac{5}{6}$$

$$k_2 = \frac{Y_B-Y_C}{X_B-X_C} = \frac{1-2}{2+3} = -\frac{1}{5}$$

$$tg\,\gamma = \left|\frac{-\frac{1}{5}+\frac{5}{6}}{1+\frac{(-1)}{5}\cdot\frac{(-5)}{6}}\right| = \frac{19}{35}$$

$$\gamma = 28°30'$$

b) Izračunajte duljinu visine trokuta iz vrha B.

$$Y-Y_A = k_1(x-x_A)$$

$$Y+3 = -\frac{5}{6}(x-3)$$

$$6Y+18 = -5x+15 \rightarrow 5x+6Y+3=0$$

$$V_b = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{5\cdot 2+6\cdot 1+3}{\sqrt{5^2+6^2}} = \frac{19}{\sqrt{61}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}$$

c) Vektor $\vec{AB}$ prikažite kao linearnu kombinaciju jediničnih okomitih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$.

$$\vec{AB} = (2-3)\vec{i} + (1+3)\vec{j} = -\vec{i} + 4\vec{j}$$

(zad. 16., str. 31, udžbenik)

2. Odredi jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao i vektor $\overrightarrow{AB}$, $A(3,1)$, $B(-1,-2)$.

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}$$

$$= \frac{-4\vec{i}-3\vec{j}}{5}$$

$$= -\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$= (-1-3)\vec{i} + (-2-1)\vec{j}$$

$$= -4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$

$$= 5$$

3. Dani su vektori $\vec{a} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Odredi vektor $\vec{v}$ kolinearan sa $\vec{c}$ duljine jednake duljini vektora $\vec{a} + \vec{b}$.

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = -2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{i} + \vec{j} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{v} \text{ i } \vec{c} \text{ kolinearni} \\ |\vec{v}| = |\vec{a} + \vec{b}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} \\ \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+(-4)^2} \end{cases}$$

$$-x = 2y$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{20} \quad /^2$$

$$x = -2y$$

$$x^2 + y^2 = 20$$

$$(-2y)^2 + y^2 = 20$$

$$5y^2 = 20$$

$$y^2 = 4$$

$y_1 = 2$ $\quad$ $y_2 = -2$

$x_1 = -4$ $\quad$ $x_2 = 4$

$$\vec{v_1} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{v_2} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

4. Odredi jedinični vektor okomit na $\vec{AB}$, $A(-1,2)$, $B(3,-1)$.

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$
$$= (3+1)\vec{i} + (-1-2)\vec{j}$$
$$= 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\begin{cases} |\vec{v}| = 1 \\ \vec{v} \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 1 \quad /^2 \\ 4 \cdot x - 3 \cdot y = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x = \frac{3}{4} y$$

$$\left(\frac{3}{4} y\right)^2 + y^2 = 1$$
$$\frac{9}{16} y^2 + y^2 = 1$$

$$y_1 = \frac{4}{5} \qquad y_2 = -\frac{4}{5}$$

$$x_1 = \frac{3}{5} \qquad x_2 = -\frac{3}{5}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$
$$\vec{v}_2 = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$