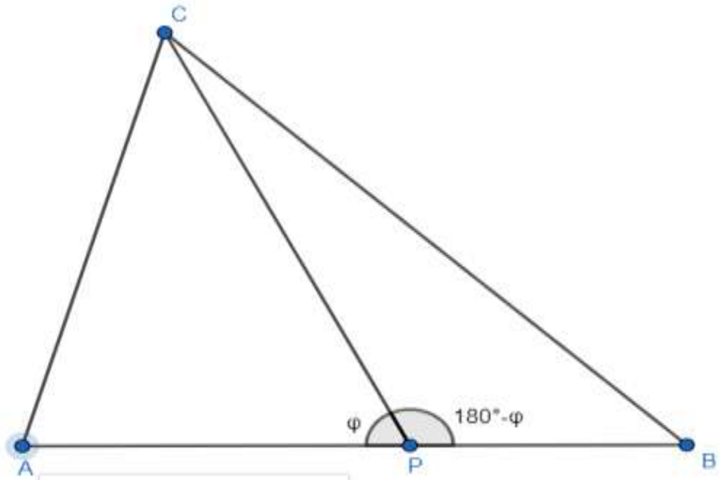
Feladat:
Határozzuk meg a háromszög súlypontjának, magasságpontjának és beírt kör középpontjának a köré írható körre vonatkozó hatványát a háromszög oldalainak segítségével!

Megoldás:
A súlypont és a magasságpont hatványát egyszerre fogjuk meghatározni.
Felhasználjuk Stewart tételét.

<u>Stewart tétel:</u>Adott az ABC háromszög és legyen P (belső) pontja az AB oldalnak. Ekkor

$$PC^2 \cdot AB = AC^2 \cdot PB + BC^2 \cdot AP - AP \cdot PB \cdot AB$$

<u>Bizonyítás:</u>



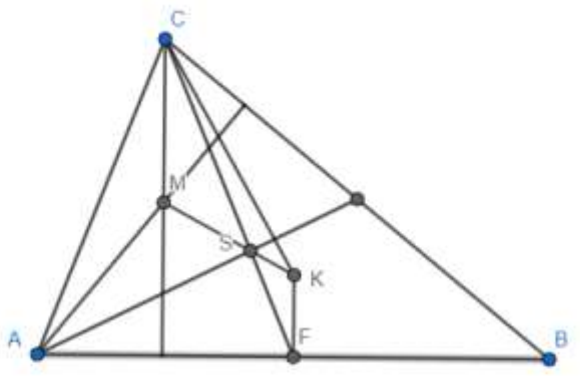
Írjuk fel az APC és BPC háromszögekben a koszinusztételt.

$$AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2 \cdot PA \cdot PC \cdot cos\varphi$$
$$BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2 \cdot PB \cdot PC \cdot cos(180° - \varphi)$$

Felhasználjuk, hogy $cos(180° - \varphi) = -cos\varphi$ és az első összefüggést PB-vel, a másodikat pedig PA-val szorozva kapjuk, hogy

$$AC^2 \cdot PB = PA^2 \cdot PB + PC^2 \cdot PB - 2 \cdot PA \cdot PB \cdot PC \cdot cos\varphi$$
$$BC^2 \cdot PA = PB^2 \cdot PA + PC^2 \cdot PA + 2 \cdot PA \cdot PB \cdot PC \cdot cos\varphi$$

Ezeket összeadva és kicsit rendezgetve megkapjuk a tétel állítását.



Írjuk fel az FKC háromszögben Stewart tételét. Tudjuk, hogy $KF = R \cdot cos\gamma$, $KC = R$ és $FS = \frac{s_c}{3}$, $SC = \frac{2s_c}{3}$.

$$KS^2 \cdot s_c = R^2 \cdot \frac{s_c}{3} + R^2 \cdot cos^2\gamma \cdot \frac{2s_c}{3} - \frac{2s_c}{3} \cdot \frac{s_c}{3} \cdot s_c$$

Felhasználjuk az alábbi ismert összefüggéseket:

$$cos^2\gamma = 1 - sin^2\gamma \text{ , } c = 2R \cdot sin\gamma \text{és} s_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

Adódik, hogy $KS^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

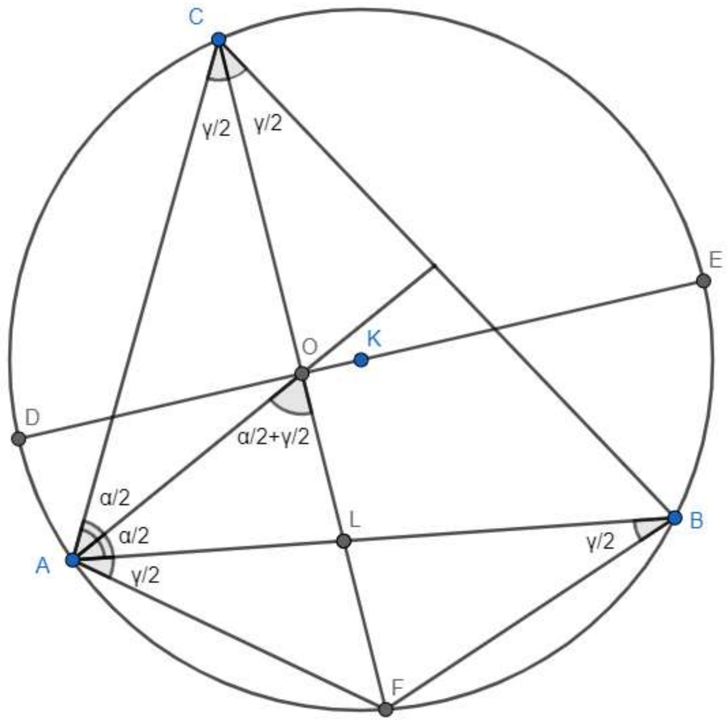
Innen a súlypont körülírt körre vonatkozó hatványa $-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

Mivel $KM = 3 \cdot KS$, ezért $KM^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

Innen a magasságpont körülírt körre vonatkozó hatványa $8R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

<u>Megjegyzés:</u>a magasságpontnak a hatványát érdemes ellenőrizni speciális háromszögben. Derékszögű háromszögben $KM = R = \frac{c}{2}$ és $c^2 = a^2 + b^2$. Ekkor a magasságpont hatványa éppen 0, amit ki is ad a kapott képlet. ☺

Most rátérünk a beírt kör középpontjának a hatványára.



Kössük össze aK és O pontokat. Ekkor $OD \cdot OE = OC \cdot OF$.
Mivel $OD \cdot OE = (R - KO) \cdot (R + KO)$, innen az$O$ pont hatványa $KO^2 - R^2 = -OC \cdot OF$.

A szögfelezőtétel miatt az ABC háromszögben $AL = \frac{bc}{a+b}$. Ismert, hogy a szögfelezőnek a háromszögbe eső hossza $LC = f_\gamma = \frac{2ab}{a+b} \cdot cos\frac{\gamma}{2}$.

Az ALC háromszögben a szögfelezőtétel miatt$OC = \frac{f_\gamma \cdot (a+b)}{a+b+c} = \frac{2ab \cdot cos\frac{\gamma}{2}}{a+b+c}$.
A C csúcsból induló szögfelező a kört az F pontban metszi, mely felezi az AB ívet.
Az AFO háromszög egyenlőszárú, mert $FAO\measuredangle = FOA\measuredangle = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Így $OF = AF = \frac{c}{2cos\frac{\gamma}{2}}$.

Tehát az O pont hatványa $KO^2 - R^2 = -OC \cdot OF = -\frac{2ab \cdot cos\frac{\gamma}{2}}{a+b+c} \cdot \frac{c}{2cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{-abc}{a+b+c}$.