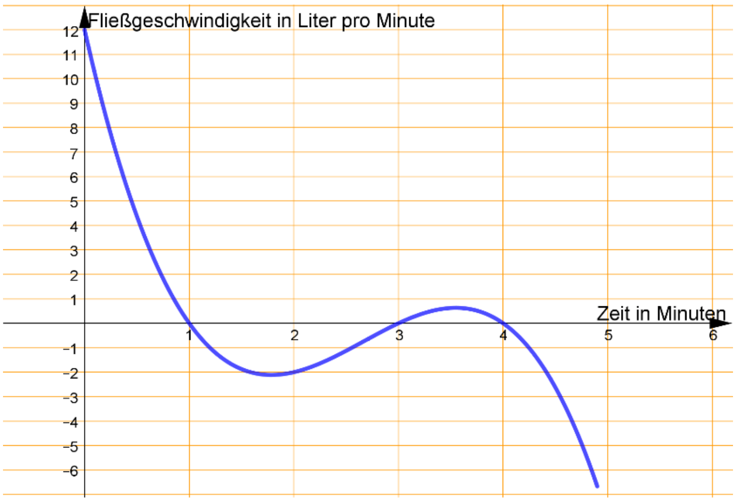
Die zeitliche Entwicklung der Fließgeschwindigkeit von Wasser in und aus einer Wassertonne wird durch die Funktion f modelliert. Dabei gilt das Modell für den Zeitraum von 0 bis 4,9 Minuten.



Dabei ordnet die Funktion f jedem Zeitpunkt x in Minuten die Fließgeschwindigkeit des Wassers $f(x)$ in Liter pro Minute $\frac{l}{min}$ zu.

$$f(x) = -x^3 + 8\,x^2 - 19\,x + 12 \qquad 0 \leq x \leq 4{,}9$$

a) *Geben Sie $f(0)$ an und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.*

b) Die Ableitungsfunktion von f ist

$$f'(x) = -3x^2 + 16x - 19$$

Erklären Sie die Regeln für das Ableiten!

c) *Berechnen Sie $f'(1)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.*

Das Aufgabenblatt hat eine Rückseite!

d) An den Stellen $x_1 \approx 1.7847$ und $x_2 \approx 3.5486$ besitzt die Funktion f lokale Extremstellen.

(1) *Geben Sie den rechnerischen Ansatz an, mit dem man die beiden Stellen x_1 und x_2 bestimmen kann.*

(2) *Erläutern Sie, wie Sie ohne Kenntnis der grafischen Darstellung, durch Rechnung entscheiden können, ob an der Stelle x_1 in lokales Minimum oder ein lokales Maximum vorliegt.*
Alternativ zur Erklärung, können Sie auch die Rechnung präsentieren.

(3) *Geben Sie den Wert des globalen Minimums an und erklären Sie den Unterschied zum lokalen Minimum.*

e) *Bestimmen Sie rechnerisch die Lösung von $f''(x) = 0$ und erläutern Sie die mathematische Bedeutung der Lösung.*

f) Die Wassertonne war zum Beginn des mathematischen Modells leer.

(1) *Erläutern Sie die Bedeutung der folgenden Rechnung für den Sachkontext.*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{59}{12} \approx 4{,}92$$

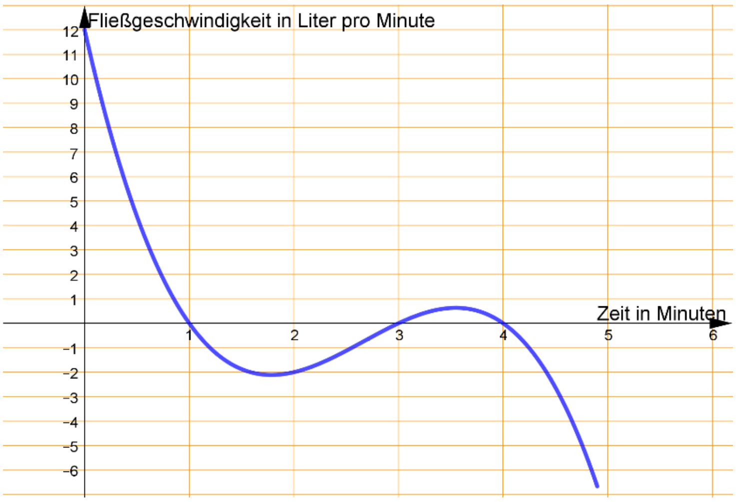
(2) *Berechnen Sie*

$$\int_0^{4,9} f(x)dx$$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

Erwartungshorizont für den 1. Teil

Die zeitliche Entwicklung der Fließgeschwindigkeit von Wasser in und aus einer Wassertonne wird durch die Funktion f modelliert. Dabei gilt das Modell für den Zeitraum von 0 bis 4,9 Minuten.



Dabei ordnet die Funktion f jedem Zeitpunkt x in Minuten die Fließgeschwindigkeit des Wassers $f(x)$ in Liter pro Minute $\frac{l}{min}$ zu.

$$f(x) = -x^3 + 8x^2 - 19x + 12 \qquad 0 \leq x \leq 4{,}9$$

a) *Geben Sie $f(0)$ an und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.*

$$f(0) = 12$$

Die Fließgeschwindigkeit des Wassers beträgt zu Beginn des Modellzeitraumes 12 Liter pro Minute in die Wassertonne hinein.

b) Die Ableitungsfunktion von f ist

$$f'(x) = -3x^2 + 16x - 19$$

Erklären Sie die Regeln für das Ableiten!

Summandenweise kann man bei ganzrationalen Funktion die folgende Regel anwenden:

$$a \cdot x^n \to n \cdot a \cdot x^{n-1}$$

Konstanten fallen beim Ableiten weg.

c) *Berechnen Sie $f'(1)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.*

$$f'(1) = -6$$

Zum Zeitpunkt 1 Minute nimmt die Fließgeschwindigkeit des Wasser um 6 Liter pro Minute pro Minute ab.

Das Aufgabenblatt hat eine Rückseite!

d) An den Stellen $x_1 \approx 1.7847$ und $x_2 \approx 3.5486$ besitzt die Funktion f lokale Extremstellen.

(1) *Geben Sie den rechnerischen Ansatz an, mit dem man die beiden Stellen x_1 und x_2 bestimmen kann.*

Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum ist $f'(x) = 0$

(2) *Erläutern Sie, wie Sie ohne Kenntnis der grafischen Darstellung, durch Rechnung entscheiden können, ob an der Stelle x_1 in lokales Minimum oder ein lokales Maximum vorliegt.*

Mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums kann man entscheiden, ob es sich an der Stelle x_1 um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt. Dazu wählt man eine Stelle $x_A < x_1$ und eine Stelle x_B mit $x_1 < x_B < x_2$ und berechnet an diesen Stellen die Funktionswerte der Ableitung. Wechseln die Vorzeichen von $+$ nach $-$, so handelt es sich um ein lokales Maximum, wechseln die Vorzeichen von – nach $+$ handelt es sich um ein lokales Minimum. Wechselt das Vorzeichen nicht, so handelt es sich um eine Sattelstelle.

Alternativ zur Erklärung, können Sie auch die Rechnung präsentieren.

x	1	$x_1 \approx 1.7847$	2
$f'(x)$	-6	0	1
	↘	↘↗	↗
		Lokales Minimum	

(3) *Geben Sie den Wert des globalen Minimums an und erklären Sie den Unterschied zum lokalen Minimum.*

Die Funktion nimmt ihr globales Minimum am rechten Rand des Modellzeitraumes ein.

$$f(4{,}9) \approx -\frac{6669}{1000} \approx -0{,}6669$$

Das globale Minimum einer Funktion stellt den niedrigsten Funktionswert im Modellzeitraum dar. Ein lokales Minimum hingegen ist nur ein minimaler Funktionswert in einer Umgebung.

e) *Bestimmen Sie rechnerisch die Lösung von $f''(x) = 0$ und erläutern Sie die mathematische Bedeutung der Lösung.*

$$f''(x) = 0 | CAS$$
$$-6 \quad x + 16 = 0$$
$$x = \frac{8}{3} = 2,\overline{6} \approx 2,67$$

An der Stelle $x = \frac{8}{3}$ könnte die Funktion einen Wendepunkt besitzen, denn die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum der 1. Ableitung ist erfüllt.
Erst eine weitere Untersuchung mit dem VZWK entscheidet, ob es sich um einen Wendepunkt mit lokal maximaler oder minimaler Steigung oder um einen Sattelpunkt der 1. Ableitung und somit um eine Stagnation der Steigung handelt.

f) Die Wassertonne war zum Beginn des mathematischen Modells leer.

(1) *Erläutern Sie die Bedeutung der folgenden Rechnung für den Sachkontext.*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{59}{12} \approx 4,92$$

Die Funktion f stellt die Änderungsrate der Wassermenge in der Wassertonne dar. Deshalb berechnet man mit diesem Integral die Änderung der Wassermenge innerhalb der 1. Minute des Modellzeitraumes. Da die Tonne zu Beginn des Modellzeitraumes leer war, beträgt die Wassermenge zum Zeitpunkt 1 Minute ca. 4,92 Liter.

(2) *Berechnen Sie*

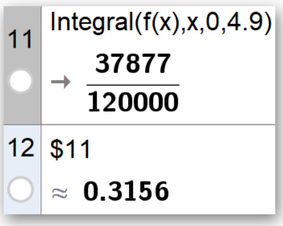
$$\int_0^{4,9} f(x)dx$$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

Mithilfe von Geogebra findet man

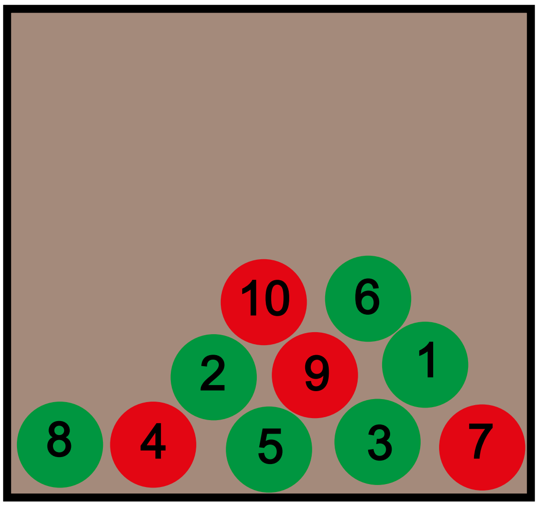
$$\approx 0,3156$$

Am Ende des Modellzeitraumes befinden sich 0,3156 Liter Wasser in der Tonne.



2. Teil der Prüfung

Die Abbildung auf der rechten Seite wird dem Prüfling mit der Aufforderung präsentiert, mögliche Zufallsexperimente zu präsentieren.



Beispiele

- Einmaliges Ziehen und Berechnung von $P(R) = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\%$ und $P(G) = 60\%$, vielleicht mit Hinweis auf Laplace
- Mehrmaliges Ziehen ohne Zurücklegen und Darstellung mithilfe eines Baumdiagramms. Zum Beispiel 3-maliges Ziehen mit Zurücklegen und Berechnung von $P(R = 2)$.
- Mehrmaliges Ziehen mit Zurücklegen und Berechnung von $P(R = k)$ mithilfe der Binomialverteilung.
- Erwartungswert μ und Standardabweichung σ
- Mehrmaliges Ziehen von Zahlen und Wahrscheinlichkeit für bestimmte Summen.

Weitere mögliche Präsentation

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	53	75	50	25	75	2

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	17	75	150	50	25	3

Der Prüfling soll Untersuchungsmöglichkeiten beschreiben

Zur Unterstützung können Rechnungen mit Geogebra gezeigt werden.

- Mittelwert, Standardabweichung

1 (53*1+75*2+50*3+25*4+75*5+2*6)/(53+75+50+25+75+2)

$$\frac{53 \cdot 1 + 75 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 25 \cdot 4 + 75 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{53 + 75 + 50 + 25 + 75 + 2}$$

2 $1

≈ 3

3 (17*1+75*2+150*3+50*4+25*5+3*6)/(17+75+150+50+25+3)

$$\frac{17 \cdot 1 + 75 \cdot 2 + 150 \cdot 3 + 50 \cdot 4 + 25 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{17 + 75 + 150 + 50 + 25 + 3}$$

4 $3

→ 3

5 sqrt((53*(1-3)^2+75*(2-3)^2+50*(3-3)^2+25*(4-3)^2+75*(5-3)^2+2*(6-3)^2)/(53+75+50+25+75+2))

$$\sqrt{\frac{53\,(1-3)^2 + 75\,(2-3)^2 + 50\,(3-3)^2 + 25\,(4-3)^2 + 75\,(5-3)^2 + 2\,(6-3)^2}{53 + 75 + 50 + 25 + 75 + 2}}$$

6 $5

≈ 1.5

7 sqrt((17*(1-3)^2+75*(2-3)^2+150*(3-3)^2+50*(4-3)^2+25*(5-3)^2+3*(6-3)^2)/(17+75+150+50+25+3))

$$\sqrt{\frac{17\,(1-3)^2 + 75\,(2-3)^2 + 150\,(3-3)^2 + 50\,(4-3)^2 + 25\,(5-3)^2 + 3\,(6-3)^2}{17 + 75 + 150 + 50 + 25 + 3}}$$

8 $7

≈ 1

9 Noten:={1,2,3,4,5,6}

≈ $\text{Noten} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

10 H_1:={53,75,50,25,75,2}

≈ $H_1 := \{53, 75, 50, 25, 75, 2\}$

11 H_2:={17,75,150,50,25,3}

≈ $H_2 := \{17, 75, 150, 50, 25, 3\}$

12 Mittel(Noten,H_1)

≈ 3

13 Mittel(Noten,H_2)

≈ 3

14 stdevp(Noten,H_1)

≈ 1.5

15 stdevp(Noten,H_2)

≈ 1