Hoja de trabajo semana 8 - Kevin Rodríguez ague - A00362652

a) una ecuación lineal es una igualdad entre dos expresiones algebraicas y que involucra sólo sumas y restas entre las variables a la primera potencia

b) características EDL

- La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado.
- Los coeficientes de la variable dependiente y sus derivadas dependen de la variable independiente.
- La linealidad sólo se exige para la variable dependiente y sus derivadas.

...

LINEAL	NO LINEAL
$xy' = y$	$y' = 2\sqrt{y}$
$y' = \frac{2y}{x}$	$y' = y^{1/3}$
	$y' = -2xy^2$

c) $y'' = 3x - 2y + 3y'$ $\quad 4y^{(4)} - 2x + y' = 4x^2$

$y''' = 4xy' - 2x$

$y'' = 2\operatorname{sen} y' + 2x$ → la linealidad falla porque la primera derivada de la variable dependiente está dentro de la función seno.

$y''' = 4x + 3y' - (y')^2$ → La linealidad falla porque la primera derivada de la variable dependiente está elevada al exponente 2.

$y'' = 2\cos y' + 4(y'')^3$ → La linealidad falla porque y'' está dentro de la función coseno y y'' está elevada al exponente 3.

$y'' = yy'$

$y'' + 3(y')^2 + 4y^3 = 0$

→ La linealidad falla porque aparecen los productos y potencias de y y sus derivadas.

② a) 4 ejemplos de polinomios

segundo grado

- $2x^2 - 7x + 3$

$$2y'' - 7y' + 3y = 0.$$

$$2r^2 - 7r + 3 = 0.$$

$$(2r-1)(r-3) = 0.$$

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad r_2 = 3.$$

$$y_1(x) = e^{x/2} \quad y_2(x) = e^{3x}$$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{3x}}$$

$$y'(x) = \frac{1}{2} c_1 e^{x/2} + 3c_2 e^{3x}$$

$$y''(x) = \frac{1}{4} c_1 e^{x/2} + 9c_2 e^{3x}.$$

$$2\left(\frac{1}{4} c_1 e^{x/2} + 9c_2 e^{3x}\right) - 7\left(\frac{1}{2} c_1 e^{x/2} + 3c_2 e^{3x}\right) + 3\left(c_1 e^{x/2} + c_2 e^{3x}\right) = 0.$$

$$\frac{1}{2} c_1 \cancel{e^{x/2}} + 18 \cancel{c_2 e^{3x}} - \frac{7}{2} c_1 \cancel{e^{x/2}} - 21 \cancel{c_2 e^{3x}} + 3c_1 \cancel{e^{x/2}} + 3 \cancel{c_2 e^{3x}} = 0 \checkmark$$

tercer grado

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

$$(x-3)(x+2)(x-2).$$

$$2y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0$$

$$(r-3)(r+2)(r-2)$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x}$$

- $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} + 2c_3 e^{2x}.$

$$y' = 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x} + 2c_3 e^{2x}$$

$$y'' = 9c_1 e^{3x} + 4c_2 e^{-2x} + 4c_3 e^{2x}$$

$$y''' = 27C_1e^{3x} - 8C_2e^{-2x} + 8C_3e^{2x}$$

$$2(27C_1e^{3x} - 8C_2e^{-2x} + 8C_3e^{2x}) - 3(9C_1e^{3x} + 4C_2e^{-2x} + 4C_3e^{2x}) \dots$$

$$-4(3C_1e^{3x} - 2C_2e^{-2x} + 2C_3e^{2x}) + \dots$$

$$12(C_1e^{3x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{2x}) = 0 \checkmark$$

cuarto grado.

$$x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24$$

$$y^{(4)} - y''' - 10y'' + 4y' + 24y = 0.$$

$$r^4 - r^3 - 10r^2 + 4r + 24$$

$$(r+2)(r+2)(r-2)(r-3).$$

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3e^{2x} + C_4e^{3x}.$$

$$y' = -2C_1e^{-2x} - 2xC_2 \cdot e^{-2x} + 2C_3e^{2x} + 3C_4e^{3x}$$

$$y'' = 4C_1e^{-2x} + 4xC_2e^{-2x} + 4C_3e^{2x} + 9C_4e^{3x}.$$

$$y''' = -8C_1e^{-2x} - 8xC_2e^{-2x} + 8C_3e^{2x} + 27C_4e^{3x}$$

$$y^{(4)} = 16C_1e^{-2x} + 16xC_2e^{-2x} + 16C_3e^{2x} + 81C_4e^{3x}.$$

(reemplazando

$$((16C_1e^{-2x} + 16xC_2e^{-2x} + 16C_3e^{2x} + 81C_4e^{3x}) - \dots$$

$$\dots(-8C_1e^{-2x} - 8xC_2e^{-2x} + 8C_3e^{2x} + 27C_4e^{3x}) - \dots$$

$$\dots 10(4C_1e^{-2x} + 4xC_2e^{-2x} + 4C_3e^{2x} + 9C_4e^{3x}) + \dots$$

$$\dots 4(-2C_1e^{-2x} - 2xC_2e^{-2x} + 2C_3e^{2x} + 3C_4e^{3x}) + \dots$$

$$\dots 24(C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3e^{2x} + C_4e^{3x}) = 0 \checkmark$$

Primer grado:

$9x-27$

$9y'-27y=0$

$9r-27=0$

$9(r-3)=0$

$r=3$

$y(x)=C_1e^{3x}$

$y'(x)=3C_1e^{3x}$

(reemplazando)

$9(3C_1e^{3x})-27(C_1e^{3x})=0$

$27C_1e^{3x}-27C_1e^{3x}=0$ ✓

b) polinomio grado 3

$(r-1)(r^2+2r+2)=0$

$r^3+2r^2+\cancel{2r}-r^2-\cancel{2r}-2$

$r^3+r^2-2=0$

$y'''+y''-2y=0$

$\underbrace{(r-1)}_{\boxed{r=1}}(r^2+2r+2)=0$

$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ donde: $a=1$, $b=2$, $c=2$

$\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4(1)(2)}}{2}\ \ldots$

$\ldots = \dfrac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}$

$= \dfrac{-2\pm(\sqrt{4}\sqrt{-1})}{2}$

$= \dfrac{-2\pm 2i}{2}$

$= -1\pm i$

$\boxed{r=-1+i}$ $\boxed{r=-1-i}$

procesos alternos

$e^{-x}(\operatorname{sen}x+\cos x)-e^{-x}(\cos x-\operatorname{sen}x)$

$e^{-x}\operatorname{sen}x+\cancel{e^{-x}\cos x}-\cancel{e^{-x}\cos x}+e^{-x}\operatorname{sen}x$

$\boxed{2e^{-x}\operatorname{sen}x}$

$2(e^{-x}\cos x-e^{-x}\operatorname{sen}x)$

$2e^{-x}\cos x-2e^{-x}\operatorname{sen}x$

$\boxed{-2e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}$

$y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}\cos x+C_3e^{-x}\operatorname{sen}x$

$y'(x)=C_1e^{x}-C_2e^{-x}(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))-C_3e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)$

$y''(x)=C_1e^{x}+2C_2e^{-x}\operatorname{sen}x-2C_3e^{-x}\cos x$

$y'''(x)=C_1e^{x}-2C_2e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)+2C_3e^{-x}(\operatorname{sen}x+\cos x)$

$y''' + y'' - 2y = 0.$

$c_1 e^{x} - 2c_2 e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x) + 2c_3 e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x) + \dots$

$\dots\ c_1 e^{x} + 2c_2 e^{-x} \operatorname{sen} x - 2c_3 e^{-x} \cos x - \dots$

$2\left(c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \cos x + c_3 e^{-x} \operatorname{sen} x\right) = 0.$ ✓

Polinomio grado 2.

$r^2 + 4 = 0 \longrightarrow y'' + 4y = 0.$

$r^2 = -4$

$r = \pm\sqrt{-4}$

$r = \pm\sqrt{4}\, i$ → $\boxed{r = 2i}$ → "Raices imaginarias puras"

$r = \pm 2i$ → $\boxed{r = -2i}$

$y(x) = c_1 \operatorname{sen}(2x) + c_2 \cos(2x)$

$y'(x) = 2c_1 \cos(2x) - 2c_2 \operatorname{sen}(2x)$

$y''(x) = -4c_1 \operatorname{sen}(2x) - 4c_2 \cos(2x)$

$y'' + 4y = 0$

$-4c_1 \operatorname{sen}(2x) - 4c_2 \cos(2x) + 4\left(c_1 \operatorname{sen}(2x) + c_2 \cos(2x)\right) = 0$

$-4c_1 \cancel{\operatorname{sen}(2x)} - 4c_2 \cancel{\cos(2x)} + 4c_1 \cancel{\operatorname{sen}(2x)} + 4c_2 \cancel{\cos(2x)} = 0$ ✓

c) Es intuitivamente razonable suponer que las funciones exponenciales son soluciones de EDO lineales homogéneas, debido a que las derivadas de la función exponencial, es ella misma acompañada por un coeficiente (como se evidencia en los puntos desarrollados en esta hoja de trabajo). Esta característica de la función exponencial, implica que se pueda tomar como factor común del término, en el que quedan los coeficientes provenientes de los exponentes de euler. Ejemplo:

$$y''-5y'+6y=0 \rightarrow r^2e^{rx}-5re^{rx}+6e^{rx}=0 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} e^{rx}(r^2-5r+6)=0 \\ e^{rx}(r-2)(r-3)=0 \end{array}}$$

donde $y=e^{rx}$ es una solución si $r=2$ o $r=3$

③ a)

- $y''-3y'+2y=3x$
  $L(y)=3x.$
  $L=D^2-3D+2$
- $2y''-7y'+3y=0.$
  $L(y)=0.$
  $L=2D^2-7D+3$
- $2y'''-3y''-4y'+12y=0$
  $L(y)=0$
  $L=2D^3-3D^2-4D+12.$
- $y^{(4)}-y'''-10y''+4y'+24y=0$
  $L(y)=0$
  $L=D^4-D^3-10D^2+4D+24=0$
- $9y'-27y=0$
  $L(y)=0$
  $L=9D-27.$

b) propiedades de linealidad:

$L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$ suma.

$L(ky)=kL(y)$ multiplicación por escalar (c)

siendo el operador $L(y)=a\dfrac{d^2y}{dx^2}+b\dfrac{dy}{dx}+cy.$

entonces, $L(y)=0 \longrightarrow$ (Solución del homogéneo asociado)

$L(y)=f(x) \longrightarrow$ (Solución particular de la ecuación diferencial) sea y_1 y y_2 soluciones del homogeneo asociado.

Esto quiere decir:

$L(y_1)=0$, $L(y_2)=0$

$L(y_1+y_2) = a(y_1+y_2)'' + b(y_1+y_2)' + C(y_1+y_2)$.

$L(y_1+y_2) = a(y_1''+y_2'') + b(y_1'+y_2') + C(y_1+y_2)$

$L(y_1+y_2) = ay_1'' + ay_2'' + by_1' + by_2' + Cy_1 + Cy_2$.

$$L(y_1+y_2) = \underbrace{ay_1''+by_1'+Cy_1}_{L(y_1)} + \underbrace{ay_2''+by_2'+Cy_2}_{L(y_2)}$$

$$\boxed{L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_2)} \checkmark$$

y como $L(y_1)=0$ y $L(y_2)=0$

$L(y_1+y_2)=0$.

Por otro lado, sea k un escalar.

$L(ky_1) = a(ky_1)'' + b(ky_1)' + C(ky_1)$.

$L(ky_1) = a(ky_1'') + b(ky_1') + C(ky_1)$.

$L(ky_1) = aky_1'' + bky_1' + Cky_1$

$$L(ky_1) = k\underbrace{(ay_1''+by_1'+Cy_1)}_{L(y_1)}$$

$$\boxed{L(ky_1) = k\cdot L(y_1)} \checkmark$$

y como planteamos que $L(y_1)=0$

$L(ky_1) = k\cdot \underbrace{\cancel{L(y_1)}}_{0}$

$L(ky_1)=0$

c) $L: N_L = \{ y : L(y) = 0 \}$

Es un un subespacio vectorial

Por el curso de Álgebra lineal, sabemos que V es un subespacio de W si $V_1, V_2 \in V$.

Para que lo anterior sea verdadero, se deben satisfacer dos propiedader:

1. $V_1 + V_2 \in V$
2. $aV_1 \in V$.

Probemos:

* Si $y_1, y_2 \in N_L$, entonces $L(y_1) = 0$, $L(y_2) = 0$

Además, por el literal anterior sabemos que

$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\underbrace{y_1 + y_2 \in N_L}_{\text{propiedad } 1.}$$

* Ahora tenemos que $L(Ky_1) = KL(y_1)$

A su vez $L(y_1) = 0$, por lo tanto:

$KL(y_1) = K(0) = 0$.

De lo anterior, se tiene que:

$$\underbrace{Ky_1 \in N_L}_{\text{propiedad } 2.}$$

Resolución y formulación de problemas

1 primero, identifico las series de taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

Multiplicando e^x por i tenemos:

$$1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} \cdots$$

Al expandir:

$$1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!}$$

si factorizamos, obtenemos:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\right)}_{\cos x.} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right)}_{\operatorname{sen} x}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x}$$

2. $Ax=b \longrightarrow \underbrace{Ax=0}_{\text{sistema homogéneo}}$

supongamos que $\tilde{x}$ es una solución de $Ax=b$ entonces,

$A\tilde{x}=b$ donde $\tilde{x}$ es una solución arbitraria.

Ahora bien, supongamos que x_p es una solución conocida, es decir:

$Ax_p=b$

Por lo que tenemos: $A\tilde{x}=b$
$Ax_p=b$

Entonces

$$A\underbrace{(\tilde{x}-x_p)}_{x_h}=b-b=0$$

$A x_h=0$ donde x_h es solución del sistema homogéneo asociado

$$x_h=\tilde{x}-x_p$$

$$\boxed{\tilde{x}=x_h+x_p}$$

solución general

solución particular del sistema no homogéneo

* En cuanto al resultado analogo para el problema no homogéneo en EDO $L(y)=g(x)$ considero que si existe debido a que como vimos en el punto 3 literal b. de esta hoja de trabajo, el operador L satisface las propiedades de linealidad. Por lo tanto, es intuitivo pensar en $y=y_c+y_p$ donde y_c es solución al homogeneo asociado, y y_p es solución a $L(y_p)=g(x)$.

Además, complementé mis consideraciones con la lectura del capítulo 3.5 del libro guía, donde mencionan la forma general de una ecuación lineal no homogénea como:

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

cuya solución general tiene la forma

$$\boxed{y = y_c + y_p.}$$

Además, si sabemos que y_c es solución del homogéneo y y_p es una solución particular de la ecuación, esto es:

$L(y_c) = 0$, $L(y_p) = f(x)$

Entonces:

$L(y_c + y_p) = \underbrace{L(y_c)}_{0} + L(y_p)$

$\underbrace{L(y_c + y_p)}_{y} = L(y_p)$

$$\boxed{L(y) = f(x)}$$