4. Schnitt zweier Zylinder

Eine Zylinderachse werde als z-Achse gewählt und die x-Achse falle mit dem gemeinsamen Lot beider Zylinderachsen zusammen. Der Abstand beider Zylinderachsen sei s und der von ihnen (*genauer von einer Parallelen zur von der z-Achse verschiedenen Zylinderachse durch den Ursprung und der z-Achse*) eingeschlossene Winkel sei ϑ mit $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Für die Radien R und r beider Zylinder findet man sodann die Gleichungen:

(I) $x^2 + y^2 = R^2$

(II) $x'^2 + y'^2 = r^2$

worin sich die Koordinaten x' und y' aus einem *Verschieben* des gedrehten Zylinders um s und einem *Aufrichten* um den Winkel ϑ bezüglich der x-Achse ergeben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_\vartheta \begin{pmatrix} x-s \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-s \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ausführlich geschrieben ergibt sich also Gleichung (II) zu

$$(x-s, y, z) {M_\vartheta}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_\vartheta \begin{pmatrix} x-s \\ y \\ z \end{pmatrix} = r^2$$

$$(x-s, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ 0 & -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-s \\ y \\ z \end{pmatrix} = r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{(II)} \quad (x-s)^2 + (y\cos(\vartheta) - z\sin(\vartheta))^2 = r^2$$

Zunächst sollen die beiden Spezialfälle $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ näher betrachtet werden. Für ersteren Fall lauten die Gleichungen

(I´) $x^2 + y^2 = R^2$

(II´) $(x-s)^2 + y^2 = r^2$

und eine Subtraktion liefert $2s \cdot x = s^2 - r^2 + R^2$. Offensichtlich hat diese Gleichung für $s = 0$ entweder die Zylinderflächen im Ganzen (*für gleiche Radien*) oder gar keine Lösungen. Sonst gilt $x = \frac{1}{2s} \cdot (s^2 - r^2 + R^2)$ und für $|x| \leq R$ folgt $y = \pm\sqrt{R^2 - \frac{1}{4s^2} \cdot (s^2 - r^2 + R^2)^2}$ bei gleichzeitig freier Wahl von $z \in \mathbb{R}$, also ergeben sich zwei Schnittgeraden. Natürlich gibt es schließlich für $|x| > R$ keine Schnittpunkte.

Der andere Spezialfall $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ führt auf die Gleichungen

(I´´) $x^2 + y^2 = R^2$

(II´´) $(x-s)^2 + z^2 = r^2$

Nach Parametrisierung der Lösungskurve in $x =: \xi$ folgt $y = \pm\sqrt{R^2 - \xi^2}$ und $z = \pm\sqrt{r^2 - (\xi - s)^2}$ mit den Nebenbedingungen $-R \leq \xi \leq R$ und $s - r \leq \xi \leq s + r$. Wenn beide Ungleichungsketten eine gemeinsame Schnittmenge haben, so folgt also

$$\gamma(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ \pm\sqrt{R^2 - \xi^2} \\ \pm\sqrt{r^2 - (\xi - s)^2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad max\{-R; s - r\} \leq \xi \leq min\{R; s + r\}.$$

Für das weitere sei nun $\vartheta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ angenommen. Löst man (I) nach $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$ auf und setzt dies in (II) ein, so erhält man die in z quadratische Gleichung

$$\left(-s \pm \sqrt{R^2 - y^2}\right)^2 + (y\cos(\vartheta) - z\sin(\vartheta))^2 = r^2$$

mit dem Parameter y. Sie ist äquivalent zu

$$(z\sin(\vartheta) - y\cos(\vartheta))^2 = r^2 - \left(-s \pm \sqrt{R^2 - y^2}\right)^2$$

und kann für den Fall, dass die rechte Seite nicht negativ ist, aufgelöst werden als

$$z_{1,2} = \frac{1}{\sin(\vartheta)} \cdot \left(y\cos(\vartheta) \pm \sqrt{r^2 - \left(-s \pm \sqrt{R^2 - y^2}\right)^2}\right)$$

Darin steht das innere „±“-Zeichen für das Vorzeichen von x. Um den beiden Vorzeichen von x in *geogebra* gerecht zu werden, wurden die Intervallgrenzen für $\alpha = \sqrt{R^2 - y^2}$ und $\beta = -\sqrt{R^2 - y^2}$ getrennt bestimmt. Die Ungleichung

$$r^2 - \left(-s \pm \sqrt{R^2 - y^2}\right)^2 \geq 0$$

lautet entsprechend

(I)	$r^2 - (-s + \alpha)^2 \geq 0$	mit der Nebenbedingung	$0 \leq \alpha \leq R$
(II)	$r^2 - (-s + \beta)^2 \geq 0$	mit der Nebenbedingung	$-R \leq \beta \leq 0$

und führt auf die Intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ und $[\beta_{min}, \beta_{max}]$ mit

$$\alpha_{min} = max\{0; s - r\} \qquad \text{und} \qquad \alpha_{max} = min\{R; s + r\}$$

$$\beta_{min} = max\{-R; s - r\} \qquad \text{und} \qquad \beta_{max} = min\{0; s + r\}$$

Wohlgemerkt stehen diese Intervalle für die zulässigen x-Werte; da die Parametrisierung der Schnittkurven jedoch in y erfolgen soll, müssen die zu y gehörigen Definitionsintervalle noch einmal gesondert bestimmt werden. Aus der Definition von α und β ergeben sich sodann

$$y^{(\alpha)} = \pm\sqrt{R^2 - \alpha^2}$$

$$y^{(\alpha)} \in \left[-\sqrt{R^2 - {\alpha_{min}}^2}; -\sqrt{R^2 - {\alpha_{max}}^2}\ \right] \cup \left[\sqrt{R^2 - {\alpha_{max}}^2}; \sqrt{R^2 - {\alpha_{min}}^2}\ \right]$$

$$y^{(\beta)} = \pm\sqrt{R^2 - \beta^2}$$

$$y^{(\beta)} \in \left[-\sqrt{R^2 - {\beta_{max}}^2}; -\sqrt{R^2 - {\beta_{min}}^2}\ \right] \cup \left[\sqrt{R^2 - {\beta_{min}}^2}; \sqrt{R^2 - {\beta_{max}}^2}\ \right]$$

Offensichtlich verschmelzen beide Intervalle zu einem für $\alpha_{max} = R$ bzw. $\beta_{min} = -R$. In *geogebra* sind die vier Intervallgrenzen mit $y_{\alpha i}$ bzw. $y_{\beta j}$ bezeichnet und repräsentieren über die Vorzeichen von x und y die vier Quadranten der xy-Ebene. Abschließend bestimmt das äußere „$\pm$"-Zeichen in $z_{1,2}$ das Vorzeichen von $z\sin(\vartheta) - y\cos(\vartheta)$ und somit die relative Lage zu $\frac{y\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)}$, sodass sich insgesamt also bis zu acht Teilkurven ergeben können. Zur Unterscheidung heißen in *geogebra* die Kurven mit „äußerem $+$-Zeichen" γ indiziert mit einem Kürzel für das Definitionsintervall und die Kurven mit „äußerem $-$-Zeichen" heißen δ. Ihre Parametrisierung ist also von der Form

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{R^2 - t^2} \\ t \\ \frac{1}{\sin(\vartheta)} \cdot \left(t\cos(\vartheta) \pm \sqrt{r^2 - \left(-s \pm \sqrt{R^2 - t^2}\right)^2}\right) \end{pmatrix}$$

Nachfolgend sind drei Beispielbilder angehängt.