PROBLÉMA: Milyen $0 < a < 1$ esetén van több megoldása az $a^x = \log_a x$ egyenletnek?

Állítás: akkor és csak akkor, ha $0 < a < e^{-e}$.

Bizonyítás: Legyen λ olyan szám, amelyre $a^\lambda = \lambda$ (azaz ahol az $y = x$ egyenest metszi a két görbe). Több metszéspont akkor és csak akkor van, ha van olyan $x > \lambda$, amelyre az

$$f(x) := \frac{a^{a^x}}{x} = 1$$

teljesül.

Vegyük f differenciálhányadosát, azaz

$$f'(x) = \frac{a^{a^x}}{x^2}[a^x \ln(a^x) \cdot \ln a - 1]$$

.

α) Ha $e^{-e} < a$, akkor

(1) $$-e < \ln a < 0 \,.$$

Másrészt, mivel a $z = y \ln \mathbf{y}$ függvénynek $\frac{1}{e}$-ben van minimuma (ez függvényvizsgálattal könnyen adódik), és ennek értéke $-\frac{1}{e}$, ezért

(2) $$-\frac{1}{e} \le a^x \ln a^x < 0$$

(mivel $x>0$, ezért $a^x < 1$).

Az (1) és (2) összeszorzásából viszont az adódik, hogy $1 > a^x \ln a^x \ln a > 0$, amiből $f'(x) < 0$-t kapjuk, ami azt jelenti, hogy f függvény csökkenő.
Viszont $f(\lambda) = l$, így azt kapjuk, hogy nem létezik $x > \lambda$ úgy, hogy $f(x) = 1$ teljesüljön

β) Ha $a = e^{-e}$, akkor $a^\lambda = \lambda$ ekvivalens azzal, hogy $e^{-\lambda e} = \lambda$. Ebből következik, hogy $\lambda = \frac{1}{e}$. Így, ha $x > \lambda$, akkor $a^x \# a^\lambda = \lambda = \frac{1}{e}$, ami azt jelenti, hogy (2)-ben a baloldalon < jel van, azaz $f'(x)<0$ ebben az esetben is, és mivel $f(\lambda) = 1$, ezért nem létezik olyan $x > \lambda$, hogy $f(x) = 1$ legyen.

γ) Ha $0 < a < e^{-e}$, akkor

(4)
$$\lambda^{\frac{1}{\lambda}} = a < e^{-e} = (e^{-1})^{\frac{1}{e^{-1}}}.$$

Mivel a $z = y^{\frac{1}{y}}$ függvény növő a (0,1)-en (ld. függvénydiszkusszió), ezért (4)-ből következően $\lambda < e^{-1}$ amiből

(5)
$$\lambda^{\frac{1}{\lambda}} = a < e^{\frac{-1}{\lambda}}$$

adódik.

Innen $a^{\lambda} \ln a^{\lambda} \ln a - 1 = \lambda^2 (\ln a)^2 - 1 > \lambda^2 (-\frac{1}{\lambda})^2 - 1 = 0$, azaz $f'(\lambda) > 0$ és $f(\lambda) = 1$, tehát λ-nak van olyan jobboldali környezete, ahol $f(x) > 1$. Viszont $f(1) = a^a < 1$, így a Bolzano-Darboux féle tulajdonság miatt a $(\lambda ; 1)$ intervallumon valahol kell, hogy az $f(x)=1$ teljesüljön.
Ezzel a bizonyítás kész.

Megjegyzés: A fentiekből adódik, hogy $0 < a < e^{-e}$ esetén (a szimmetriát figyelembe véve) legalább 3 metszéspont van. Több azonban nem lehet, mert ha a $g(x) = a^x - \log_a x$ függvénynek 3-nál több zéróhelye lenne, akkor a Rolle-féle középértéktétel szerint a $g'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x \ln a}$ függvénynek legalább 3 zérushelye lenne, ami ekvivalens azzal, hogy az $a^x \ln a = \frac{1}{x \ln a}$, azaz az $x(\ln a)^2 = a^{-x}$ egyenletnek legalabb 3 megoldása lenne, ami viszont az a^{-x} függvény szigorú konvex volta miatt lehetetlen, hiszen egy egyenes egy ilyen görbét legfeljebb 2 pontban metszhet.