Ein Ausdruck der Form

$$2^5$$

heißt Potenz. Die Potenz besteht aus der Basis und dem Exponenten.

Zum warm werden, eine paar **Rechenaufgaben**:

$$3^3 = \square, 2^{\square} = 64, \square^3 = 125$$

Der Logarithmus zur Basis… ist die Umkehrfunktion.

Beispiele:

$$2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$$

$$\log_9 81 = 2, \text{ weil } 9^2 = 81$$

Noch mehr Rechenaufgaben

$$\log_4 64 = \square$$

$$\log_{10} \square = \mathbf{10000}$$

$$\log_{\square} 216 = 3$$

Rechenregeln für Potenzen

$$2^4 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4-mal} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3-mal} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\square-mal} = 2^{\square}$$

$$\boxed{a^b \cdot a^c = a^{\square + \square}}$$

$$\frac{2^7}{2^3} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^{7-mal}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3-mal}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\square-mal} = 2^{\square}$$

$$\boxed{\frac{a^b}{a^c} = a^{\square - \square}}$$

$$(2^3)^4 = \underbrace{\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}_{3-mal}\cdot\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}_{3-mal}\cdot\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}_{3-mal}\cdot\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}_{3-mal}}_{4-mal} =$$

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{\square-mal} = 2^{\square}$$

$$\boxed{(a^b)^c = a^{\square\cdot\square}}$$

Bei den folgenden **Aufgaben** sollen fassen Sie die Ausdrücke zusammen. Das Endergebnis müssen Sie nicht berechnen.

$$3^5\cdot 3^7 = \square$$

$$2^4 \div 2^3 = \square$$

$$2^5\cdot 2^{\square} = 2^{20}$$

$$\left(5^{\square}\right)^3 = 5^{27}$$

$$8^2\cdot 2^3 = 8^{\square} = 2^{\square}$$

Folgerungen aus den Rechengesetzen

$$a^b\cdot a^c = a^{b+c}$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$(a^b)^c = a^{b\cdot c}$$

Diese drei Rechengesetze konnten Sie anhand der Rechenbeispiel als richtig erkennen.

Mithilfe der Rechengesetze kann man nun auch klären, was negative Exponenten, Brüche als Exponenten oder 0 als Exponent bedeuten.

Die 0 als Exponent

Wenn die 0 als Exponent einen Sinn machen soll, so muss der Ausdruck a^0 auch den Rechengesetzen für Potenzen gehorchen. Lediglich $a = 0$, also 0^0 muss man ausschließen.

$$a^0 \cdot a^b = a^{\square + \square}$$

$$a^0 \cdot a^b = a^{\square} \mid \div a^b$$

$$\boxed{a^0 = \square}$$

Für jede beliebige Zahl a, die nicht Null ist, gilt

$$a^0 = 1$$

Anmerkung: Das kling doch komisch. Wenn man eine beliebige Zahl 0-mal mit sich selbst multipliziert, kommt 1 heraus. Aber auch wenn es komisch klingt: Wenn man die vernünftigen Rechenregeln für Potenzen ernst nimmt, dann muss das so sein.

Negative Exponenten

Kann man eine Zahl $(-5) - mal$ mit sich selbst multiplizieren.

Wenn a^{-5} sinnvoll sein soll, so muss der Ausdruck den Rechenregeln gehorchen.

$$a^{-5} \cdot a^5 = a^{\square + \square}$$

$$a^{-5} \cdot a^5 = a^{\square} = \square \mid \div a^5$$

$$\boxed{a^{-5} = \frac{\square}{\square}}$$

Für jede beliebige Zahl a, die nicht Null ist, gilt die Regel

$$a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

Rechenaufgaben

$$3^0 = \square$$

$$5^{\square} = \frac{1}{25}$$

$$3^{-3} = \frac{\square}{\square}$$

Brüche als Exponenten

Kann man die Zahl 4 ein halbes mal mit sich selbst multiplizieren?

Wenn $a^{\frac{1}{2}}$ sinnvoll sein soll, dann muss dieser Ausdruck den Rechenregeln gehorchen.

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\square \cdot \square}$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\square} | \sqrt{}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\square}$$

Das geht auch für $a^{\frac{1}{3}}$

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\square \cdot \square}$$

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\square} | \sqrt[3]{}$$

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\square}$$

Und dann natürlich auch für beliebiges n

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Rechenaufgaben

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2, \text{weil } 2^3 = 8$$

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3, \text{weil } 3^4 = 81$$

$$10000^{\frac{1}{4}} =$$

$$128^{\frac{1}{7}} =$$

$$64^{\frac{1}{\square}} = 4$$

$$\square^{\frac{1}{5}} = 5$$

Bleiben noch Brüche, die keine 1 im Zähler haben.

$$a^{\frac{b}{c}} = (a^b)^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$$

oder

$$a^{\frac{b}{c}} = \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^b = \left(\sqrt[c]{a}\right)^b$$

Rechenaufgaben

$$8^{\frac{5}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^5 = 32$$

$$625^{\frac{3}{4}} = \left(625^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 5^3 = 125$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \square$$

$$27^{\frac{4}{\square}} = 81$$

$$\square^{\frac{2}{3}} = 16$$

$$36^{\frac{\square}{2}} = \frac{1}{6}$$