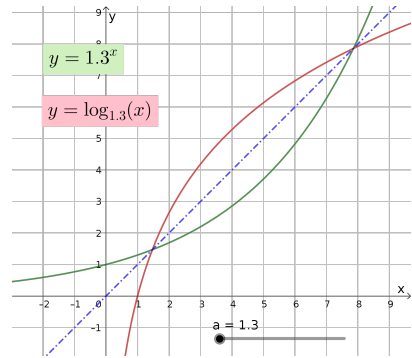
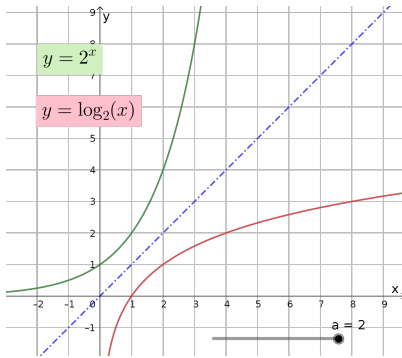




Příklad 7

Grafy vzájemně inverzních funkcí $y = a^x$ a $y = \log_a x$ jsou, jak víme, osově souměrné podle osy I . a III . kvadrantu o . (Viz aplet <https://ggbm.at/brndebbf>) Pro $a = 2$ se grafy neprotínají a pro $a = 1,3$ se protínají ve dvou bodech. Pro jakou hodnotu $a > 1$ budou mít jen jeden společný bod (osa o bude jejich společnou tečnou)? Jaké souřadnice bude mít bod jejich dotyku T ?



Přímka $o : y = x$ má být tečnou grafu funkce $f(x) : y = a^x$, musí mít tedy směrnici $k = 1$. Směrnice tečny je derivací – zderivujeme tedy f a položíme derivaci rovnou jedné:

$$\ln a \cdot a^x = 1 \quad (1)$$

Pro dotkový bod T (pač leží současně na ose o i na exponenciále) platí současně rovnice

$$a^x = x \quad (2)$$

Nyní stačí vyřešit soustavu rovnic (1) a (2) pro neznámé x, a (Neznámá x je x -ovou souřadnicí dotkového bodu.) Rovnici (2) vydělíme rovnicí (1) a dostáváme:

$$x = \frac{1}{\ln a} \quad (3)$$



Rovnici (3) dosadíme do (2):

$$\begin{aligned}
 a^{\frac{1}{\ln a}} &= \frac{1}{\ln a} \quad | \ln \\
 \ln a^{\frac{1}{\ln a}} &= \ln \frac{1}{\ln a} \\
 \frac{1}{\ln a} \cdot \ln a &= \ln \frac{1}{\ln a} \\
 1 &= \ln \frac{1}{\ln a} \\
 \frac{1}{\ln a} &= e \\
 \ln a &= \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme:

$$\underline{\underline{a = e^{\frac{1}{e}}}} \quad (4)$$

Dosadíme (4) do (3):

$$x = \frac{1}{\ln e^{\frac{1}{e}}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} \Rightarrow \underline{\underline{x = e}}$$

Závěr: Hledaná exponenciála má receptis

$$y = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^x = \underline{\underline{e^{\frac{x}{e}}}}$$

K ní inverzní logaritmická fce má receptis

$$y = \log_{e^{1/e}} x = \frac{\ln x}{\ln e^{\frac{1}{e}}} = \underline{\underline{e \cdot \ln x}}$$

Dotykový bod má pořadnice

$$T[e, e]$$

